

Bibliografia

Doebelin, *Strumenti e metodi di misura - MCGRAW-HILL - Ed2008* pagg. 131-177; 197-200; 309-325;634-637

INDICE

0 - Richiami di meccanica delle vibrazioni: Sistema vibrante a 1 grado di libertà	pag. 2
a) Integrale generale della omogenea associata.	pag. 3
b) Integrale particolare della equazione completa	pag. 4
1.0 - Sismometri ed accelerometri - Sistemi del secondo ordine	pag. 7
1.1 - Risposta di un sismometro a segnali genericamente variabili nel tempo	pag. 8
a) Caratteristiche richieste al sismometro per misurare correttamente uno spostamento assegnato.	pag. 10
1.2 - Risposta di un accelerometro a segnali genericamente variabili nel tempo	pag. 11
a) Caratteristiche richieste all'accelerometro per misurare correttamente una accelerazione assegnata.	pag. 12
1.3 - Accelerometri e segnali variabili nel tempo con andamento particolare	pag. 14
a) segnale a gradino	pag. 14
b) segnale a rampa	pag. 15
2.0 - Ordine dei sistemi, sistemi di ordine zero	pag. 17
3.0 - Sistemi di primo ordine	pag. 18
a) Integrale generale della omogenea associata.	pag. 19
b) Integrale particolare della equazione completa	pag. 20
3.1 - Risposta di un termometro a segnali genericamente variabili nel tempo	pag. 20
a) caratteristiche richieste ad un termometro per misurare correttamente una variazione di temperatura assegnata	pag. 21
3.2 - Termometri e segnali variabili nel tempo con andamento particolare	pag. 22
a) segnale a gradino	pag. 22
4.0 - Problemi generali dell'adeguamento della risposta in frequenza	pag. 23
5.0 - Verifica del modello	pag. 24
a) determinazione dei parametri	pag. 24
b) verifica sperimentale del modello fisico-matematico	pag. 25

0 - Richiami di meccanica delle vibrazioni: Sistema vibrante a 1 grado di libertà

Si consideri il sistema di Fig. 1:

- che può muoversi nella sola direzione x ,
- sul quale agiscono solo forze nella direzione x ,
- è costituito da tre elementi "teorici" così definiti:

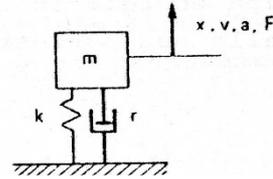


Fig. 1

- **massa**: elemento che soggetto alla azione di una forza subisce una accelerazione, proporzionale alla forza secondo una costante di proporzionalità m , avente la direzione ed il verso della forza; la massa è assolutamente indeformabile e quindi con rigidità infinita e smorzamento nullo

$$F = m \cdot a \quad a = \text{accelerazione assoluta della massa} = \ddot{x}$$

quando la massa accelera reagisce con una forza, la forza di inerzia, opposta alla accelerazione

$$\text{Forza di inerzia:} \quad F_i = -m \cdot a = -m \cdot \ddot{x}$$

- **molla**: elemento che, soggetto alla azione di due forze uguali e contrarie, si deforma di una quantità direttamente proporzionale alla forza secondo una costante di proporzionalità K , costante della molla; la molla è caratterizzata da massa nulla e da smorzamento nullo

$$F = K \cdot x_r; \quad x_r = \text{deformazione della molla} =$$

= spostamento estremo collegato alla massa - spostamento altro estremo

la molla deformata reagisce con una forza, forza elastica, opposta alla deformazione:

$$\text{Forza elastica:} \quad F_e = -K \cdot x_r$$

- **smorzatore viscoso**: elemento che, soggetto alla azione di due forze uguali e contrarie, si deforma con una velocità direttamente proporzionale alla forza secondo una costante di proporzionalità r , costante di smorzamento viscoso; lo smorzatore viscoso è caratterizzato da massa nulla e da rigidità nulla.

$$F = r \cdot v_r; \quad v_r = \text{velocità di deformazione della molla} = \dot{x}_r$$

= velocità estremo collegato alla massa - velocità altro estremo

lo smorzatore viscoso deformato con velocità diversa da zero reagisce con una forza, Forza viscosa, opposta alla velocità di deformazione

$$\text{Forza viscosa:} \quad F_v = -r \cdot v_r = -r \cdot \dot{x}_r$$

Togliendo tutti i vincoli, e cioè la molla e lo smorzatore, ed evidenziando le forze che i vincoli esercitavano sulla massa possiamo scrivere le equazioni di equilibrio della massa in movimento ¹:

¹ Convenzioni di segno: chiamiamo x lo spostamento della massa a partire dalla posizione di equilibrio statico e assegniamo:

- segno positivo allo spostamento x , e alle sue derivate, come in figura;
- segno positivo alle forze agenti sulla massa se dirette come x ;

- $x_r = x$ - spostamento altro estremo, positivo quindi se la molla si allunga;
- $v_r = \dot{x}$ - velocità altro estremo; positivo quindi se tende ad allungare la molla e lo smorzatore

$$F_i + F_v + F_e = 0 \quad - m a - r v_r - K x_r = 0 \quad - m\ddot{x} - r\dot{x}_r - Kx_r = 0 \quad (0-1)$$

se l'estremo della molla e dello smorzatore sono vincolati al terreno:

$$x_r = x; \quad v_r = v = \dot{x}$$

$$- m\ddot{x} - r\dot{x} - Kx = 0 \quad m\ddot{x} + r\dot{x} + Kx = 0 \quad (\text{vedi nota } ^2) \quad (0-2)$$

viceversa se anche l'estremo della molla può muoversi e se chiamiamo x_t il suo spostamento

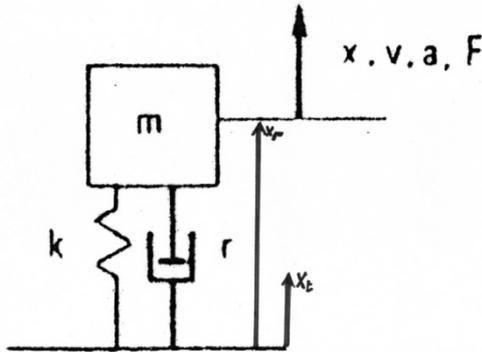


Fig. 2

risulta: $x = x_r + x_t \quad v = \dot{x} = \dot{x}_r + \dot{x}_t \quad a = \ddot{x} = \ddot{x}_r + \ddot{x}_t$

$$m(\ddot{x}_r + \ddot{x}_t) + r\dot{x}_r + Kx_r = 0; \quad m\ddot{x}_r + r\dot{x}_r + Kx_r = -m\ddot{x}_t \quad (0-3)$$

L'equazione risultante è una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti.

L'analisi matematica ci insegna che essa ha una soluzione composta dalla somma di due termini:

$$x_r = x_{rg} + x_{rp} \quad (0-4)$$

$$- x_{rg} = \text{integrale generale della omogenea associata } m\ddot{x}_r + r\dot{x}_r + Kx_r = 0 \quad (0-5)$$

- x_{rp} = integrale particolare della equazione completa

Mentre x_{rg} è sempre ricavabile analiticamente, x_{rp} è ricavabile analiticamente solo per alcune particolari funzioni del termine a destra dell'uguale (forzante), con un caso particolarmente semplice da risolvere dato dalle funzioni esponenziale e armonica (seno, coseno).

a) Integrale generale della omogenea associata.

Definendo:

$$\omega_n = \sqrt{K/m} \quad \text{pulsazione propria del sistema non smorzato} \quad (0-6)$$

$$r_c = 2 \cdot m \cdot \omega_n = 2\sqrt{K \cdot m}; \quad \text{smorzamento critico (vedi nota} ^3) \quad (0-7)$$

² Il controllo dimensionale evidenzia che nella formula sono sommati tutti e solo termini aventi la dimensione "forza" e che quindi la formula è formalmente corretta

³ Il valore dello smorzamento, confrontato con lo smorzamento critico r_c , determina il comportamento del sistema; se $r \geq r_c$ un sistema non forzato esternamente e inizialmente perturbato torna nella posizione di equilibrio senza oscillare; $r < r_c$ un sistema non forzato esternamente e inizialmente perturbato torna nella posizione di equilibrio con oscillazioni via via smorzate.

$$h = r / r_c \text{ coefficiente di smorzamento} \quad (0-8)$$

Nel caso in cui $r < r_c$ ($h < 1$), come sempre capita nei casi di interesse degli strumenti di misura, definendo

$$\omega_{nh} = \omega_n \sqrt{1 - h^2} \quad \text{pulsazione del sistema in presenza di smorzamento} \quad (0-9)$$

l'integrale generale della omogenea associata vale:

$$x_{rg} = e^{-h\omega_n t} (A \cdot \cos(\omega_{nh} \cdot t) + B \cdot \text{sen}(\omega_{nh} \cdot t)) \quad (0-10)$$

dove le costanti A e B sono determinate imponendo che l'equazione completa del moto, integrale particolare più integrale generale della omogenea associata, soddisfi le condizioni iniziali x_{r0} e \dot{x}_{r0} ovvero che al tempo $t = 0$ siano $x_r(0) = x_{r0}$ e $\dot{x}_r(0) = \dot{x}_{r0}$

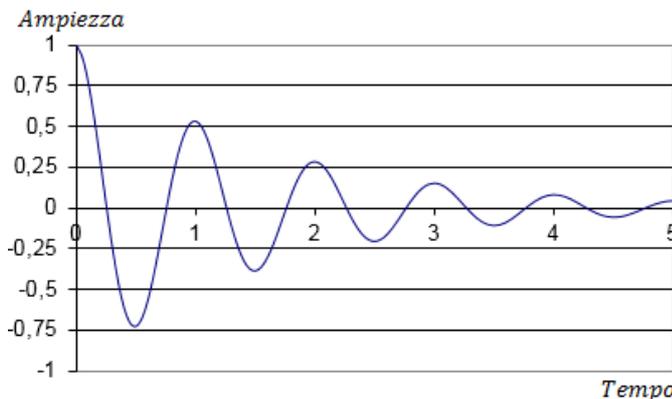
Si noti che se la costante r di smorzamento non è nulla, ovvero se h non è nullo, l'equazione appena scritta definisce, per qualunque condizione iniziale diversa da zero, una oscillazione con legge armonica smorzata, moto che viene chiamato "transitorio iniziale".

Dalla equazione (0-10), e come si deduce anche dalle figure 3a e 3b, si ricava che la componente di moto definita dal solo integrale generale della omogenea associata ha una ampiezza che diminuisce, tra un ciclo ed il successivo, in funzione del solo valore del rapporto di smorzamento h, e quindi le ampiezze diminuiscono tanto più velocemente quanto più elevato è il valore della pulsazione propria del sistema.

Nel caso particolare nel quale non vi siano forzanti esterne né movimenti del vincolo, le costanti A e B si possono facilmente trovare e si otterrà la soluzione:

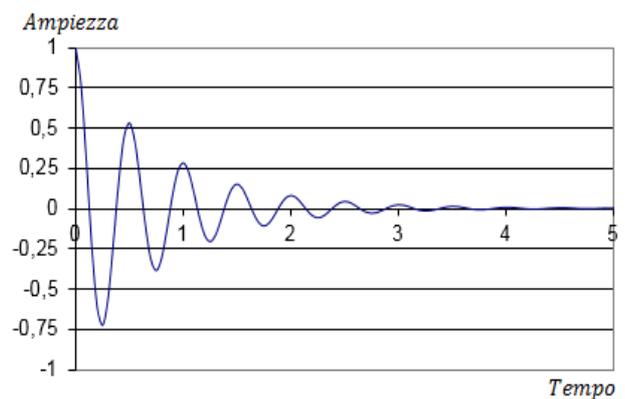
$$x_{rg} = e^{-h\omega_n t} (x_{r0} \cdot \cos(\omega_{nh} \cdot t) + (\dot{x}_{r0} / \omega_{nh}) \cdot \text{sen}(\omega_{nh} \cdot t)) \quad (0-11)$$

equazione visualizzata nelle figure 3a e 3b per i parametri indicati in didascalia.



$$x_{r0} = 1 ; \dot{x}_{r0} = 0 ; r / r_c = 0,1 ; f = 1\text{Hz}$$

Fig. 3a



$$x_{r0} = 1 ; \dot{x}_{r0} = 0 ; r / r_c = 0,1 ; f = 2\text{Hz}$$

Fig. 3b

b) Integrale particolare della equazione completa

Come detto, l'integrale particolare è determinabile solo in casi particolari e, fra questi, risulta particolarmente interessante, per l'utilizzo che sarà esaminato in seguito, il caso nel quale x_t abbia andamento armonico con ampiezza \bar{x}_{ta} ⁴

⁴ Il pedice "a" indica "grandezza armonica"
Il pedice "s" indica "segnale" e cioè grandezza generica

$$x_t = x_{ta} = \bar{x}_{ta} \cos \omega_a t ; \ddot{x}_t = \ddot{x}_{ta} = -\bar{x}_{ta} \omega_a^2 \cos \omega_a t \quad (0-12)$$

l'integrale particolare, che rappresenta il moto a regime, ovvero quando si sia esaurito il transitorio iniziale, vale:

$$x_{rap} = \frac{m\bar{x}_{ta} \omega_a^2}{\sqrt{(K - m\omega_a^2)^2 + (r\omega_a)^2}} \cdot \cos(\omega_a t + \varphi_a) = \bar{x}_{rap} \cdot \cos(\omega_a t + \varphi_a) \quad (\text{vedi nota } ^5) \quad (0-13)$$

dove:

$$\text{tg} \varphi_a = \frac{-r\omega_a}{K - m\omega_a^2} \quad (0-14)$$

si può inoltre definire il **coefficiente di amplificazione** Φ_a :

$$\Phi_a = \frac{\bar{x}_{rap}}{\bar{x}_{ta}} = \frac{m\omega_a^2}{\sqrt{(K - m\omega_a^2)^2 + (r\omega_a)^2}} \quad (0-15)$$

Quando ω_a è uguale a zero, x_{ra} è uguale a zero e quindi x_a e x_{ta} sono uguali in modulo e segno (fase $\varphi_a = 0$); invece quando ω_a è uguale ad infinito x_{ra} e x_{ta} sono uguali in modulo ma con segno opposto (fase $\varphi_a = -\pi$); infine quando $\omega_a = \omega_n$, x_{ra} diventa molto grande, al limite infinito se $r=0$, dando origine al fenomeno noto come "risonanza".

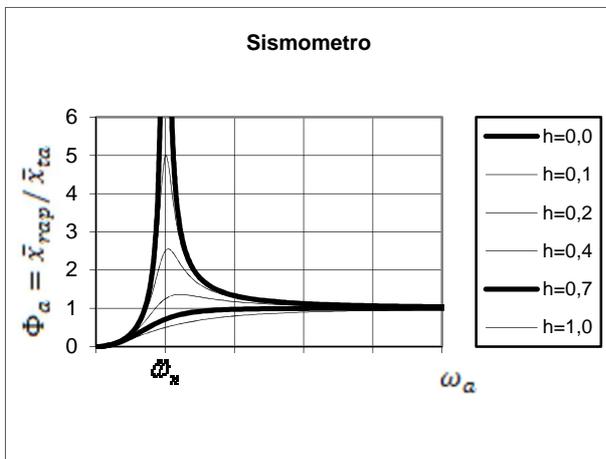


Fig. 4a

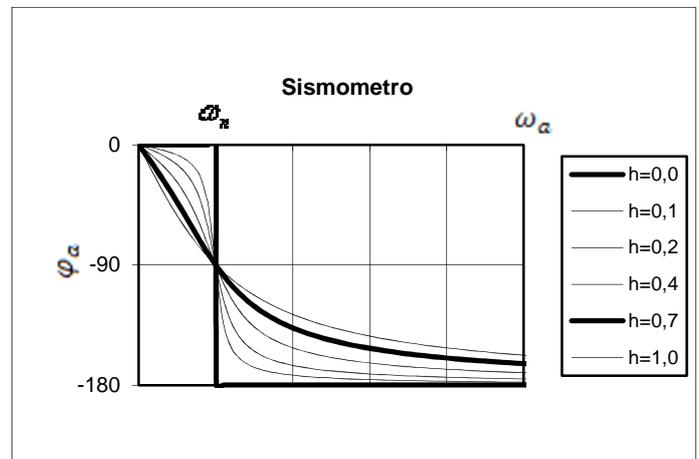


Fig. 4b

Le prime due particolarità prima evidenziate fanno intuire come sia possibile realizzare strumenti di misura di accelerazione assoluta (accelerometro) o di spostamento assoluto (sismometro):

- se ω_a è molto piccolo, anche se non nullo, \bar{x}_{rap} è quasi uguale a zero e quindi \bar{x}_a (spostamento della massa) diventa quasi uguale a \bar{x}_{ta} ; la accelerazione della massa diventa quasi uguale alla accelerazione del vincolo, la velocità relativa diventa quasi uguale a zero.

L'equazione di equilibrio diventa quasi uguale a:

⁵ Il controllo dimensionale evidenzia che, nella formula, tutti i singoli coefficienti ($m\omega^2$, k , $r\omega$) hanno le medesime dimensioni e che quindi, correttamente, a destra dell'uguale vi è una lunghezza

$$x_{rap} = F_i / K = -m x_{ta} \omega_a^2 / K = -m x_{ta} \omega_a^2 / K$$

facendoci vedere quindi che misurando la deformazione della molla x_{ra} possiamo ottenere direttamente, con le avvertenze che vedremo in seguito, la accelerazione del vincolo e realizzare quindi un accelerometro assoluto

- se ω_a è molto grande, anche se non pari ad infinito, x_{ra} è comunque quasi uguale a x_{ta} e φ_a uguale a $-\pi$, ovvero la massa rimane quasi ferma; se la massa rimane ferma costituisce un riferimento inerziale e quindi misurando x_{ra} si misura di fatto, a parte il segno e con le avvertenze che vedremo in seguito, lo spostamento del vincolo realizzando quindi un sismometro assoluto.

Per capire il significato della affermazione " ω_a molto grande" o " ω_a molto piccolo" è opportuno evidenziare nella equazione dell'integrale particolare il rapporto:

$$a = \omega_a / \omega_n \tag{0-16}$$

Moltiplicando e dividendo l'espressione di Φ_a per $m \cdot \omega_n^2$ si ottiene:

$$\Phi_a = \frac{\bar{x}_{rap}}{\bar{x}_{ta}} = \frac{a^2}{\sqrt{(1-a^2)^2 + 4a^2h^2}} \tag{0-17}$$

$$tg \varphi_a = \frac{-2ah}{1-a^2} \tag{0-18}$$

se ne deduce che ω_a si dovrà ritenere grande se molto più grande di ω_n ($a \gg 1$), viceversa piccolo se molto più piccolo di ω_n ($a \ll 1$)

Si riporta, a mo' di esempio, in figura il moto ricavato nel caso di massa inizialmente ferma sottoposta, al tempo $t=0$ ad una forzante sinusoidale; con linea sottile è disegnato il moto a regime; con linea spessa il moto effettivo nel caso di $\omega_n=4\omega_a$ e $h=0,1$



1.0 - Sismometri ed accelerometri - Sistemi del secondo ordine

Per costruire un sismometro o un accelerometro bisognerà quindi costruire un sistema costituito da una scatola, che dovrà essere fissata all'oggetto del quale vorremo misurare il movimento, all'interno della quale dovrà essere realizzato il sistema vibrante ad un grado di libertà fino ad ora studiato. Bisognerà poi installare uno strumento di misura dello spostamento relativo tra la massa vibrante ed il vincolo della molla e dello smorzatore, scegliere infine opportunamente i parametri costruttivi (m , r , K), .

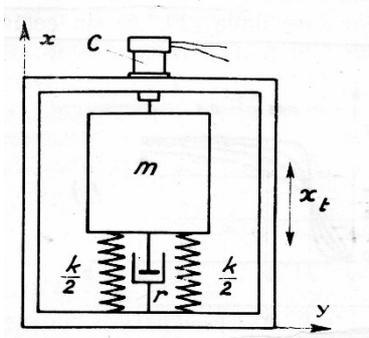


Fig. 5

L'analisi del comportamento dello strumento di misura andrà poi condotta ricavando il rapporto tra la grandezza che viene misurata dallo strumento di misura (indicazione), lo spostamento relativo nel nostro caso, e la grandezza con andamento armonico che vogliamo misurare, la accelerazione del vincolo nel caso di accelerometro, lo spostamento del vincolo nel caso di sismometro. Queste relazioni vengono genericamente indicate come "*funzione di trasferimento armonica*" dello strumento di misura.

Si noti però che, a differenza dello schema teorico esaminato in precedenza nel quale era assegnato lo spostamento, e quindi la accelerazione, del vincolo, ora lo spostamento del vincolo, la sua accelerazione, è l'incognita da trovare e che quindi bisogna aggiungere l'ipotesi, da verificare, che lo strumento di misura abbia effetto di carico nullo, ovvero che la sua applicazione non modifichi la grandezza da misurare. Nel caso specifico risulta evidente che l'effetto di carico diverrà sensibile nel caso in cui la massa globale dello strumento di misura diventasse una frazione non piccola della massa del sistema del quale vogliamo misurare spostamenti o accelerazioni.

Nel caso di sismometro le equazioni 0-13 e 0-14, e le curve delle figure 4a e 4b, prima riportate, sono già la funzione di trasferimento armonica dello strumento di misura, ovvero le equazioni e curve che permettono di correlare, in funzione della pulsazione dello spostamento armonico impresso, il valore della grandezza di misura x_{rap} al valore x_{ta} della grandezza da misurare, sempre ovviamente a regime.

Nel caso di accelerometro la funzione di trasferimento armonica dovrà correlare lo spostamento relativo (integrale particolare) x_{rap} alla accelerazione del vincolo $\bar{x}_{ta} \omega_a^2$, e pertanto il fattore di amplificazione, e la relativa fase, diventeranno:

$$\Phi_a = \frac{\bar{x}_{rap}}{\omega_a^2 \cdot \bar{x}_{ta}} = \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^2 + 4a^2 h^2}} \quad (\text{vedi nota } ^6) \quad (1-1)$$

$$tg \varphi_a = \frac{-2ah}{1-a^2} \quad (1-2)$$

⁶ Il controllo dimensionale evidenzia che nella formula, nella quale gli elementi "a" e "h" sono adimensionali, essendo il rapporto tra spostamento ed accelerazione dimensione t^2 , correttamente a destra dell'uguale c'è $1/\omega_n^2$ cioè dimensione t^2

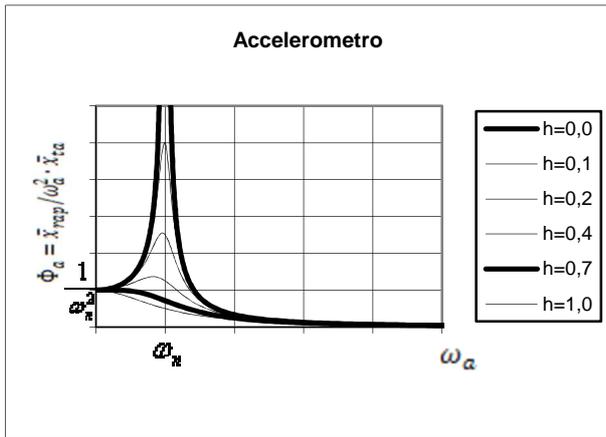


Fig. 6a

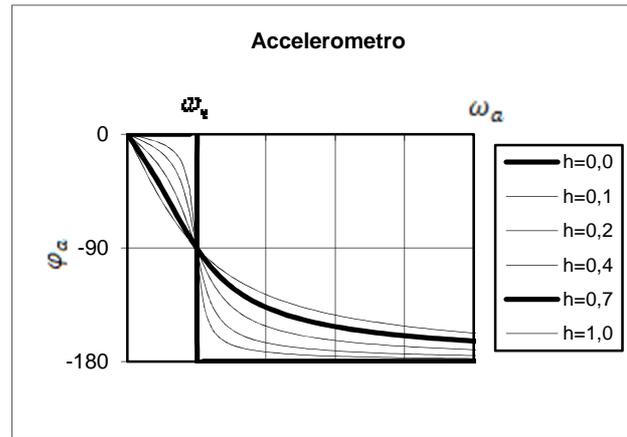


Fig. 6b

Nel caso di accelerometro quindi le equazioni 1-1 e 1-2, e le curve delle figure 6a e 6b, costituiscono la relazione che permette di correlare a regime, in funzione della pulsazione della accelerazione avente andamento armonico, il valore misurato x_{rap} al valore da misurare \ddot{x}_{ta} .

1.1 - Risposta di un sismometro a segnali genericamente variabili nel tempo

Se lo strumento di misura ha comportamento lineare, come ad esempio l'accelerometro o il sismometro schematizzati sopra, la applicazione della sovrapposizione degli effetti ci suggerisce la possibilità di studiare il comportamento dello strumento di misura al segnale generico come somma delle risposte dello strumento di misura alle singole armoniche nelle quali ogni segnale, anche il più strano, è scomponibile tramite la trasformata di Fourier.

Nel semplice esempio di grandezza da misurare periodica, la trasformata di Fourier diventa la serie di Fourier. Dato che otterremo, sia dalla serie di Fourier sia dalla trasformata di Fourier, una espressione nella quale compare la somma di infinite armoniche, la trattazione logica dello sviluppo con funzione generica e quella con funzione periodica coincidono; per la semplicità di scrittura nel seguito considereremo il caso di funzione periodica e quindi lo sviluppo in serie di Fourier.

La serie di Fourier permette di scomporre in una serie di funzioni armoniche una funzione x_t periodica di periodo T_s , dove funzione periodica significa che per ogni istante t vale la relazione $x_t(t + T_s) = x_t(t)$ e dove quindi è possibile definire una pulsazione ω_1 :

$$\omega_1 = 1/T_s \quad = \text{pulsazione fondamentale (prima armonica) dello spostamento } x_t \quad (1-3)$$

La serie di Fourier è data dalla somma del valor medio della funzione scomposta più infinite armoniche, ciascuna avente pulsazione multipla intera della pulsazione fondamentale, ed ha la espressione:

$$x_t = \bar{x}_{t0} + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos(i\omega_1 t) + B_i \sin(i\omega_1 t)) \quad (1-4)$$

dove:

$$\bar{x}_{t0} = \frac{1}{T_s} \cdot \int_{-T_s/2}^{T_s/2} x_t \cdot dt \quad = \text{valor medio della funzione } x_t \quad (1-5)$$

$$A_i = \frac{2}{T_s} \cdot \int_{-T_s/2}^{T_s/2} x_t \cdot \cos(i\omega_1 t) \cdot dt \quad (1-6)$$

$$B_i = \frac{2}{T_s} \cdot \int_{-T_s/2}^{T_s/2} x_t \cdot \text{sen}(i\omega_1 t) \cdot dt \quad (1-7)$$

e, ponendo infine:

$$C_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2} \quad \text{e} \quad \psi_i = \arctan(-B_i / A_i) \quad (1-8)$$

la serie di Fourier può essere scritta come

$$x_t = \bar{x}_{t0} + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot \cos(i\omega_1 t + \psi_i) \quad (1-9)$$

L'utilizzo della serie di Fourier, assieme allo studio del sistema vibrante, ci permette quindi, utilizzando la sovrapposizione degli effetti, di ricavare il valore della indicazione, a regime, x_r , quando il vincolo è soggetto ad un generico spostamento periodico x_t .

Ricavando dalle equazioni (1-1) e (1-2) i valori di $\Phi_i = \bar{x}_{rip} / \bar{x}_{ii}$, rapporto di amplificazione a regime, fra ampiezza dello spostamento relativo (indicazione) ed ampiezza dello spostamento del vincolo (grandezza da misurare) quando questo è armonico con pulsazione $i\omega_1$, e di φ_i , valore della fase relativa fra indicazione e spostamento da misurare, si ottiene:

$$x_r = \bar{x}_{t0} \cdot \Phi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot \Phi_i \cos(i\omega_1 t + \psi_i + \varphi_i) \quad (1-10)$$

Confrontando questa equazione con la equazione dello sviluppo in serie di x_t , risulta evidente che, per valori generici di Φ_0 , Φ_i , φ_i , i valori di x_r e x_t sono del tutto diversi fra loro, ovvero che lo strumento sismometro non è normalmente in grado di misurare lo spostamento x_t : si dice che lo strumento distorce l'indicazione; viceversa, se Φ_0 , Φ_i e φ_i hanno espressioni tali che consentano di estrarli dalla equazione che definisce x_r , le espressioni di x_r e x_t diverranno, a meno di un fattore di scala e di un ritardo temporale, assolutamente uguali.

Condizioni per non avere distorsione:

Φ_i è un fattore moltiplicativo e quindi potrà essere estratto dallo sviluppo in serie di x_r , cioè scomparirà dalla equazione di x_r , non avendo quindi distorsione in ampiezza se:

il rapporto di amplificazione $\Phi_0 = \Phi_i = \text{costante}$ per ogni "i";

ovvero se Φ è costante al variare di ω e quindi può essere raccolto divenendo un fattore di scala.

φ_i è una fase che si somma in una funzione armonica e quindi potrà essere estratto dallo sviluppo in serie di x_r , cioè scomparirà dalla equazione di x_r , non avendo quindi distorsione di fase, se:

- 1) $\varphi_i = 0$ per ogni "i" ovvero per ogni ω : in questo caso x_t e x_r risultano in fase e quindi hanno lo stesso segno
- 2) $\varphi_i = \pi = -\pi$ per ogni "i" ovvero per ogni ω : x_t e x_r sono in controfase e quindi hanno segno opposto

3) $\varphi_i = i \cdot \varphi_1$ per ogni "i" ovvero per ogni ω : la fase cresce linearmente con la pulsazione⁷

Qualora siano contemporaneamente verificate la condizione sul rapporto di amplificazione e una delle tre condizioni sulle fasi, non si avrà distorsione e quindi lo strumento di misura funzionerà correttamente.

Purtroppo, come si vede dalle figure 4a e 4b né Φ_i né φ_i hanno, al variare delle frequenze, il comportamento prima definito per cui sarà impossibile costruire un sismometro che sia in grado di misurare correttamente un qualsiasi spostamento.

Per quanto visto, lo studio della capacità del sismometro di misurare spostamenti variabili nel tempo si riduce infine allo studio di due diverse alternative:

- dato uno spostamento, come devo realizzare un sismometro che sia in grado di misurarlo correttamente?
- dato un sismometro quali tipologie di spostamento è in grado di misurare correttamente?

Anticipiamo subito che con "correttamente" non si potrà mai intendere come "senza distorsione" ma bensì con una distorsione quantizzabile ed "accettabile" ovvero con un errore di misura massimo preventivamente definito.

a) Caratteristiche richieste al sismometro per misurare correttamente uno spostamento assegnato.

Il confronto fra la curva di risposta a regime del sismometro (figure 4a e 4b) e lo sviluppo in serie dello spostamento da misurare (equazione 1-9) mostra chiaramente che, comunque sia costruito il sismometro, x_{t0} , valor medio dello spostamento e quindi la componente a pulsazione nulla, non sarà mai rilevabile: sempre sicuramente lo strumento di misura perderà il valor medio.

Tutte le altre componenti armoniche, aventi pulsazioni $\omega_1, \omega_2 = 2 \cdot \omega_1, \omega_i = i \cdot \omega_1, \omega_\infty = \infty \cdot \omega_1$, avranno invece rapporto di amplificazione uguale ad uno e fasi tutte uguali a $-\pi$ solo se $\omega_1 \gg \omega_n$; accettando un errore massimo dell'1% si ottiene, in assenza di smorzamento e nel caso peggiore e cioè con ampiezza della armonica a pulsazione $1 \cdot \omega_1$ maggiore della ampiezza di tutte le altre, che le condizioni sopra definite sono verificate per $1 \cdot \omega_1 > 10 \omega_n$, rapporto che però si dimezza se si accetta un errore massimo del 5%. Questa constatazione si scontra però con il problema pratico qui di seguito descritto.

Dato ω_1 sarà sempre possibile pensare di poter costruire un sismometro con pulsazione propria ω_n sufficientemente più piccola di ω_1 ma potranno esserci problemi costruttivi se si volessero misurare spostamenti non orizzontali: quando infatti lo spostamento da misurare non giace su una linea orizzontale, chiamando α l'angolo formato rispetto all'orizzonte, la forza peso agente sulla massa del sismometro provocherà un allungamento "statico" della molla dato dalla relazione:

$$x_{rstat} = (g \cdot m / K) \cdot \text{sen} \alpha = (g / \omega_n^2) \cdot \text{sen} \alpha \quad (1-11)$$

dove con g è indicato il valore della accelerazione di gravità.

Nel caso peggiore, ovvero di misura di spostamenti verticali e quindi di molla verticale (come nella figura 5), si avrebbe $\alpha = \pi / 2 \Rightarrow \text{sen} \alpha = 1$. Per quest'ultimo caso, guardando i valori di x_{rstat} in

⁷ Fase (nel nostro caso negativa) linearmente crescente con la pulsazione corrisponde alla introduzione di un ritardo temporale costante su tutte le armoniche e quindi, se Φ è costante, $x_r(t) = \Phi \cdot x_i(t - \nabla t)$ con

$\nabla t = \varphi_1 / 1 \cdot \omega_1 = \varphi_2 / 2 \cdot \omega_1 = \varphi_2 / \omega_2 = \varphi_i / \omega_i$

funzione di ω_n riportati in tabella, si vede che risulta di fatto irrealizzabile la costruzione di un sismometro avente frequenza propria inferiore a 1Hz in quanto esso dovrebbe essere estremamente pesante ed ingombrante, dovrebbe infatti avere dimensioni sufficienti a permettere la deformazione statica della molla e quindi almeno di alcuni decimetri.

relazione ω_n - X_{rstat}		
ω_n [Hz]	ω_n [rad/s]	X_{rstat} [m]
0,16	1,00	9,810
0,32	2,00	2,453
0,50	3,14	0,995
1,00	6,28	0,249
2,00	12,56	0,062
3,00	18,84	0,028
4,00	25,12	0,016
5,00	31,40	0,010

Tab. 1

Un ulteriore problema è rappresentato dalla scelta se introdurre o meno smorzamento nel sistema vibrante; la figura 4b mostra che, per minimizzare la distorsione di fase, cioè per avere $\varphi_i = -\pi$ per tutte le armoniche presenti nel segnale, senza dover scegliere ω_n troppo più piccolo di ω_1 , è opportuno che lo smorzamento sia molto piccolo (se possibile addirittura nullo), mentre per minimizzare la distorsione di ampiezza (Fig. 4a) risulta opportuno scegliere un coefficiente di smorzamento h pari a 0,7. La scelta però di uno smorzamento troppo basso comporterebbe che, in caso di spostamento da misurare non perfettamente periodico, si innescherebbero dei transitori che, come visto, richiederebbero molti cicli, e quindi essendo ω_n piccolo, un tempo molto elevato per smorzarsi. Il risultato sarebbe che le curve 4a e 4b, che permettono di ricavare la componente di spostamento a regime, non rappresenterebbero più lo spostamento globale x_r , indicazione dello strumento di misura, e quindi non consentirebbero più di valutare la capacità dello strumento di misurare correttamente lo spostamento stesso.

Nella pratica costruttiva si aggiunge smorzamento in modo che gli eventuali transitori si eliminino sufficientemente in fretta, accettando quindi che le più basse frequenze misurabili, quando non si sia a regime, siano pari a circa dieci volte la frequenza propria del sismometro.

1.2 - Risposta di un accelerometro a segnali genericamente variabili nel tempo

Per studiare il comportamento dell'accelerometro bisogna seguire esattamente la procedura esaminata per il sismometro ovvero, schematicamente:

- individuare, tramite la serie di Fourier, le ampiezze e le pulsazioni delle armoniche presenti nella accelerazione da misurare
- analizzare il comportamento dell'accelerometro e, in particolare, ricavare la funzione di trasferimento armonica e cioè sfasamento introdotto e rapporto fra la indicazione, che anche in questo caso è rappresentata dallo spostamento relativo x_{rap} , e la grandezza che vogliamo misurare, la accelerazione del vincolo, quando questa varia con legge armonica ovvero quando vale $x_{ta}\omega_a^2$ (equazioni 1-1 e 1-2)
- analizzare, al variare del coefficiente di smorzamento h e del valore della pulsazione propria ω_n , se il coefficiente di amplificazione rimane costante al variare della pulsazione in modo da non avere distorsione di ampiezza, e se la fase tra indicazione e grandezza da misurare soddisfa una delle tre condizioni poste ovvero o valore nullo, o valore pari a $-\pi$, o valore proporzionale alla pulsazione.

Anche in questo caso si vede che per qualunque valore di smorzamento e di pulsazione propria scelti non esisterà un accelerometro in grado di misurare correttamente una qualsiasi accelerazione e che pertanto dovremo individuare, per ogni accelerometro, quali caratteristiche dovranno avere le accelerazioni per essere misurate correttamente, oppure dovremo capire come costruire un accelerometro in grado di misurare correttamente una particolare accelerazione.

a) Caratteristiche richieste all'accelerometro per misurare correttamente una accelerazione assegnata.

Il confronto fra la curva di risposta dell'accelerometro (figure 6a e 6b) e lo sviluppo in serie della accelerazione da misurare:

$$\text{accelerazione} = \ddot{x}_t = acc_{t0} + \sum_{i=1}^{\infty} acc_{ti} \cdot \cos(i\omega_1 t + \psi_i) \quad (1-12)$$

mostra chiaramente che il rapporto di amplificazione delle varie componenti armoniche della accelerazione differiranno da un valore costante tanto più quanto più la pulsazione aumenta e si avvicina alla pulsazione propria ω_n per poi tendere al valore zero per ω tendente all'infinito. Ne risulta che se effettivamente nella accelerazione fossero presenti infinite frequenze sarebbe impossibile costruire un accelerometro correttamente funzionante.

Introducendo però il concetto di massimo errore ammissibile sulla misura della accelerazione ε_t , possiamo trasformare la equazione 1-9 nella:

$$\text{accelerazione} = \ddot{x}_t = acc_{t0} + \sum_{i=1}^N acc_{ti} \cdot \cos(i\omega_1 t + \psi_i) + \varepsilon_t \quad (1-13)$$

e conseguentemente l'indicazione diventerà:

$$x_r = acc_{t0} \cdot \Phi_0 + \sum_{i=1}^N acc_{ti} \cdot \Phi_i \cos(i\omega_1 t + \psi_i + \varphi_i) + \varepsilon_r \quad (1-14)$$

dove N dovrà essere scelto in modo che ε_r sia più piccolo del massimo errore di misura che consideriamo accettabile. Si vede subito che, in questo caso, sarà sufficiente che distorsione di ampiezza e di fase provochino errori minori dell'errore massimo ammissibile non più per infinite pulsazioni ma solo per le pulsazioni comprese fra zero e $\omega_{sMax} = N\omega_1$: $0 \leq \omega \leq N\omega_1$

Nel caso di smorzamento nullo si vede (figure 6a e 6b ed equazioni 1-1 e 1-2) che, mentre non ci sono problemi di distorsione di fase purché $\omega_{sMax} < \omega_n$, ci sarà sempre distorsione di ampiezza ma, accettando un errore massimo dell'1%, nel caso peggiore e cioè con ampiezza della armonica a pulsazione ω_{sMax} maggiore della ampiezza di tutte le altre, occorrerà che la più elevata armonica presente nello sviluppo in serie di Fourier, abbia pulsazione ω_{sMax} più piccola di $0,1 \cdot \omega_n$ valore che però aumenta a $0,2 \cdot \omega_n$ se si accetta un errore massimo del 5%.

Come spesso accade però la analisi teorica si scontra con alcuni problemi pratici.

- legame fra la ampiezza del campo di frequenze correttamente misurabili e la sensibilità

Come si vede chiaramente da quanto detto prima, per aumentare il valore limite delle frequenze correttamente misurabili dobbiamo aumentare ω_n ma, così facendo, riduciamo la sensibilità dell'accelerometro di un fattore ω_n^2 ; questo problema si affronta, come si vedrà nel seguito, sia scegliendo misuratori di spostamento relativo molto sensibili sia scegliendo

opportunamente il valore dello smorzamento: si vede infatti, dalla Fig. 6a, che in corrispondenza di un valore di h pari a 0,7, il fattore di amplificazione rimane costante, con errore inferiore al 5%, sino a circa $0,6 \cdot \omega_n$ e contemporaneamente lo sfasamento introdotto, Fig. 6b, risulta proporzionale alla pulsazione fino a ω_n . Ne risulta che con smorzamento $h=0,7$, invece che con $h=0$, sarà possibile costruire, a pari campo di frequenze misurabili correttamente, accelerometri con maggiore sensibilità. Si ricordi però che la presenza di uno sfasamento non nullo provoca un ritardo temporale tra indicazione e grandezza da misurare; nel caso di accelerometro con $h=0,7$ questo ritardo è circa uguale ad $= 1,5 / \omega_n$. In un caso reale se si avesse $\omega_n = 62.800$ rad/s (10.000 Hz) il ritardo sarebbe circa di 0,02 ms, ritardo assolutamente trascurabile a meno che non si debbano confrontare istante per istante più segnali misurati con strumenti aventi ω_n , e quindi ritardi, diversi fra di loro. In questo ultimo caso infatti si potrebbe giungere a risultati e deduzioni anche gravemente difformi dalla realtà.

- non conoscenza preventiva delle caratteristiche del segnale

Quando si misurano accelerazioni legate a fenomeni nuovi, dei quali cioè non si abbia esperienza precedente, non sempre risulta immediata la valutazione della frequenza delle armoniche caratteristiche del segnale e, in particolare, del loro valore massimo. Per quanto detto però una scelta non corretta delle caratteristiche dell'accelerometro porta a distorsione ovvero a sfasare le singole armoniche presenti nel segnale in maniera non corretta e ad amplificarle ognuna in modo diverso. In questi casi risulta utile sia una analisi delle forzanti che agiscono sul sistema fisico sottoposto a misura, sia la scelta preventiva di un accelerometro avente frequenza propria molto elevata, e conseguentemente con bassa sensibilità, al solo scopo di riconoscere le pulsazioni delle armoniche presenti nel segnale di misura e, solo successivamente, utilizzare l'accelerometro più sensibile a disposizione ma che sicuramente non distorce.

- possibile presenza di armoniche non dipendenti dal fenomeno fisico che si vuole misurare

Come si vedrà quando si esamineranno le tecnologie costruttive degli accelerometri, alcuni fra gli accelerometri a maggior diffusione, gli accelerometri piezoelettrici, hanno un valore di smorzamento bassissimo. Siccome spesso accade che al segnale utile atteso si sommino segnali di disturbo dovuti alla presenza di forzanti saltuarie, quali per esempio urti, potrebbero comparire nel segnale di misura armoniche ad ampiezza non piccolissima e con pulsazione prossima ad ω_n ; queste armoniche inattese sarebbero, in caso di piccolo valore dello smorzamento, amplificate molto dall'accelerometro portando ad una forte distorsione. A questo si aggiunga poi che, come si vedrà in seguito, la ampiezza massima della tensione di uscita degli strumenti di misura è normalmente limitata dalla elettronica di condizionamento dello strumento. Se il segnale tende a superare questo limite va in saturazione ovvero è tagliato in ampiezza. Come risultato della eventuale saturazione non sarà più riconoscibile, e quindi utilizzabile, il segnale utile dovuto alla accelerazione di interesse. In questi casi, qualora non si sia sicuri che non esistano fenomeni esterni inattesi che possano generare segnali con armoniche aventi frequenze non comprese nel campo di corretto funzionamento dell'accelerometro, sarà opportuno eliminare queste armoniche prima che arrivino all'accelerometro stesso con opportuni filtri⁸, filtri meccanici, interposti fra l'accelerometro ed il corpo del quale si voglia misurare l'accelerazione.

Le trattazioni viste fino ad ora, che consideravano solo grandezze da misurare di tipo periodico, possono essere immediatamente estese come detto anche a segnali genericamente variabili nel tempo. Tutte le considerazioni fino ad ora sviluppate rimarranno valide con la sola avvertenza che la

⁸ La definizione di "filtro" è in Doebelin alle pagg. 685-693

pulsazione fondamentale ω_1 prima trovata, di valore finito, degenererà in una pulsazione infinitesima $d\omega$, e che quindi la serie (sommatoria) di Fourier si trasformerà nella più generale trasformata (integrale) di Fourier.

1.3 - Accelerometri e segnali variabili nel tempo con andamento particolare

Consideriamo ora la risposta di misura di un accelerometro utilizzato per misurare accelerazioni particolari per le quali risulti immediata la determinazione della soluzione.

a) segnale a gradino

Viene definita "a gradino" la variazione di una grandezza che, ad un tempo t_i , passa istantaneamente da valore g_i a valore g_f .

Una variazione di accelerazione a gradino si ha, ad esempio, quando un accelerometro inizialmente fermo viene lasciato cadere: la accelerazione misurata passa istantaneamente dal valore zero al valore g della accelerazione di gravità; un secondo esempio si ha quando si fissa su un veicolo, che provenendo da un rettilineo imbocchi una curva a raggio costante, un accelerometro in direzione normale alla direzione di marcia: anche in questo caso la accelerazione misurata passerà istantaneamente dal valore zero al valore corrispondente alla accelerazione centripeta.

Lo studio della risposta dello strumento di misura potrebbe essere condotto mediante la trasformata di Fourier, trasformata che, nel caso particolare di gradino con valore iniziale nullo e che dopo l'istante $t_i = 0$ sale a valore finale unitario, vale:

$$\text{gradino di } a = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \omega t}{\omega} d\omega \quad (\text{integrale di Dirichlet}) \quad (1-15)$$

ma risulta molto più semplice risolvere la equazione differenziale dello strumento di misura constatando che nel caso sopraddetto la soluzione corrisponde alla risposta completa, integrale particolare più integrale della omogenea associata, della equazione differenziale

$$m \ddot{x}_r + r \dot{x}_r + K x_r = m g \quad (1-16)$$

con $t \geq 0$ e con condizioni iniziali:

$$x_r = 0$$

$$\dot{x}_r = 0$$

soluzione rappresentata nella figura 7 nella quale si è indicato con valore 1 la indicazione che l'accelerometro fornisce, a regime, quando misura una accelerazione pari a $1 \cdot g$

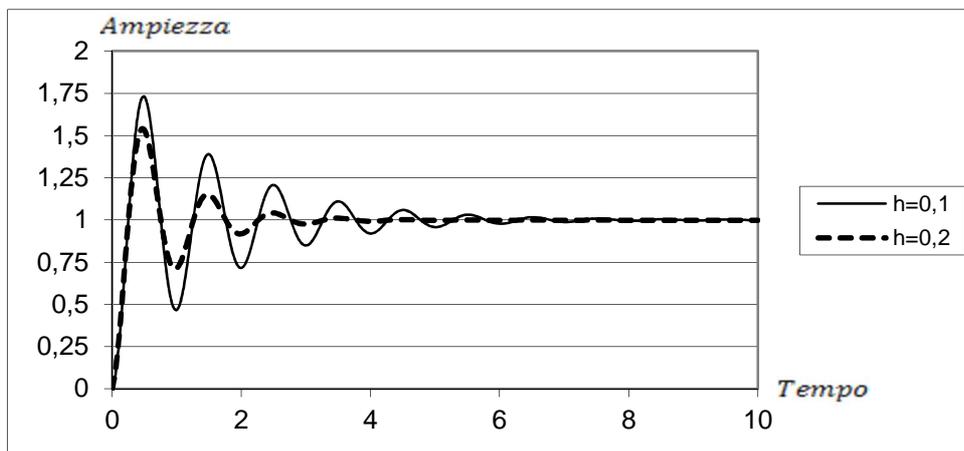


Fig. 7

Analogamente a quanto visto nel caso di una accelerazione periodica, sarà impossibile che la indicazione dell'accelerometro sia sempre corretta ma, stabilendo un errore ritenuto accettabile ed essendo disposti a leggere la indicazione dopo un congruo tempo corrispondente ad un determinato numero di cicli, otterremo una indicazione corretta.

Considerando la figura 7 si vede che l'oscillazione della indicazione varia attorno ad un valor medio corretto e che la ampiezza dello scostamento decresce, ad ogni ciclo, tanto più rapidamente quanto più elevato è h . In questo esempio avremo una indicazione che differisce sempre meno del 5% da quella corretta dopo cinque cicli con rapporto $h=0,1$ o dopo due cicli con rapporto $h=0,2$ corrispondenti, nella ipotesi di accelerometri con frequenza propria di 10.000Hz a tempi, rispettivamente, di 0,5ms e di 0,2ms. Come già visto, qualora la frequenza propria dell'accelerometro fosse minore, valesse ad esempio 200Hz come può capitare nel caso di accelerometri estensimetrici, il tempo di attesa necessario per avere indicazione discordante per meno del 5% aumenterebbe a 100ms nel caso di $h=0,1$, a 40ms nel caso di $h=0,2$

b) segnale a rampa

Si definisce rampa un segnale inizialmente con valore costante pari a zero che, a partire dal tempo t_i , cresce linearmente nel tempo. La legge della rampa sarà quindi:

$$a = 0 \text{ per } t \leq t_i$$

$$a = b \cdot (t - t_i) \quad (\text{con } b=\text{costante}) \text{ per } t > t_i \quad (1-17)$$

La soluzione, ancora, potrebbe essere trovata utilizzando la trasformata di Fourier ma, più semplicemente, risolvendo l'equazione differenziale:

$$m \ddot{x}_r + r \dot{x}_r + K x_r = m \cdot b \cdot (t - t_i) \quad (1-18)$$

con $t \geq t_i$ e con condizioni iniziali:

$$x_r(t - t_i) = 0$$

$$\dot{x}_r(t - t_i) = 0$$

La soluzione completa, data da integrale particolare + integrale della omogenea associata, supponendo $h < 1$, vale, per $(t - t_i) > 0$,

$$x_r = \frac{b}{\omega_n^2} \cdot \left((t - t_i) - \frac{2h}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_{nh}} \cdot e^{-h\omega_n(t-t_i)} \cdot \text{sen}(\omega_{nh}(t-t_i) + \varphi) \right) \quad (1-19)$$

Il modulo della soluzione, sovrapposto all'andamento della rampa, è rappresentato con scale arbitrarie nelle figure 8a e 8b per due diversi valori del rapporto h di smorzamento e con $t_i=0$:

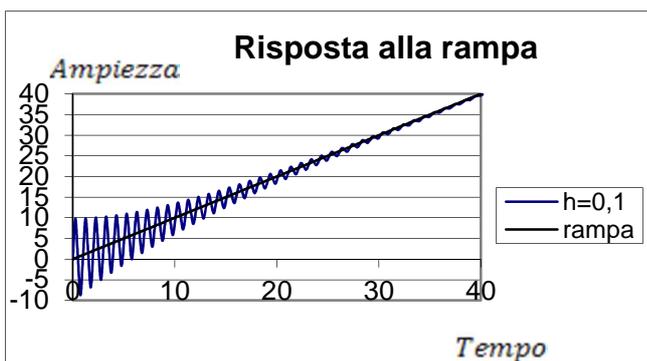


Fig. 8a

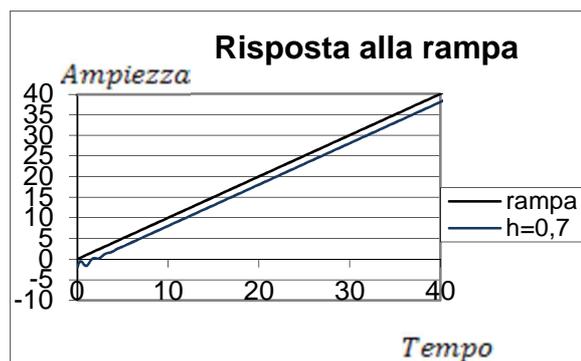


Fig. 8b

Anche in questo caso si presenta un transitorio iniziale oscillatorio per cui bisognerà attendere alcuni cicli, e corrispondentemente un tempo inversamente proporzionale ad ω_n , prima che la indicazione dell'accelerometro differisca dal valore corretto a meno del solo valore $2h/\omega_n$.

Proprio per evitare ai veicoli che affrontano una curva una situazione oscillatoria come quelle provocate da un innesco improvviso a gradino o a rampa, causa di rotture nella struttura e spiacevoli per i passeggeri, le curve delle linee ferroviarie, e in alcuni casi delle strade veloci, sono raccordate ai tratti rettilinei con le clotoidi⁹ ovvero con linee il cui raggio di curvatura passa con gradualità dal valore infinito iniziale, corrispondente al rettilineo, alla curva vera e propria a raggio costante, evitando così cambi istantanei e finiti della sterzata dei veicoli guidati e aumenti improvvisi di accelerazione laterale.

⁹ La clotoide è una linea piana definita tramite l'equazione

$$\rho s^n = A^{n+1}$$

dove è indicato con ρ il raggio di curvatura e con s la coordinata curvilinea avente valore zero in corrispondenza del punto di raccordo rettilineo-curva; A ed n sono i parametri che permettono di progettare la lunghezza del tratto di raccordo fra il rettilineo ed il tratto di curva a raggio costante.

2.0 - Ordine dei sistemi, sistemi di ordine zero

Come anticipato nei precedenti paragrafi, si è soliti indicare sinteticamente con la dizione "sistemi del secondo ordine" il comportamento degli strumenti di misura il cui modello porta alla scrittura di una equazione differenziale a coefficienti costanti del secondo ordine. Con dizione analoga saranno quindi definiti come strumenti di misura di ordine zero, di ordine uno, di ordine n, gli strumenti di misura il cui modello fisico di comportamento porti alla scrittura di equazioni differenziali a coefficienti costanti di ordine zero, di ordine uno, di ordine n.

Si può sin d'ora anticipare che, come intuitivo, se il comportamento degli strumenti del secondo ordine poteva essere sintetizzato da due parametri caratteristici, pulsazione propria ω_n e rapporto di smorzamento h , gli strumenti di ordine zero non possiederanno parametri caratteristici, gli strumenti di ordine uno potranno essere sintetizzati da un parametro, gli strumenti di ordine n da n parametri.

Un esempio di strumento di misura di ordine zero è il misuratore di tensione elettrica mediante circuito potenziometrico descritto nella figura seguente:

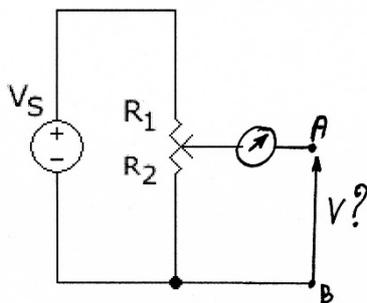


Fig. 9

La tensione da misurare viene applicata ai morsetti A-B e l'indicazione viene ottenuta spostando il cursore del potenziometro in modo da azzerare la corrente che passa attraverso il galvanometro (misuratore di corrente, qui indicato con un cerchietto con una freccia nel proprio interno): in questa situazione sono evidentemente uguali la tensione da misurare e la caduta di potenziale lungo il tratto A-B del potenziometro. Semplificando al massimo il circuito di misura, indicando con L la lunghezza utile del potenziometro, con x la posizione del cursore rispetto a B, con V_S la tensione di alimentazione, e supponendo infine che anche durante i transitori la corrente che circola nel potenziometro sia sempre uguale alla tensione di alimentazione fratto la resistenza globale del potenziometro, il modello produce la seguente equazione:

$$V = V_S \cdot (x / L)$$

ovvero, come anticipato, una equazione di ordine zero nella quale cioè non compaiono derivate della indicazione.

E' del tutto evidente che, in questo caso, qualunque sia l'andamento della variazione della grandezza da misurare, armonico, periodico, a gradino, a rampa, generico, l'andamento della indicazione x sarà, a meno del fattore di scala V_S / L , esattamente uguale, e quindi senza distorsioni, all'andamento della grandezza (tensione) da misurare indipendentemente dal valore dei parametri costruttivi del potenziometro.

3.0 - Sistemi di primo ordine

Un esempio di strumento del primo ordine è costituito dal termometro.

Il termometro, per tutti i possibili fenomeni fisici utilizzati per misurare la temperatura e per qualsiasi tecnica costruttiva utilizzata¹⁰, è un sistema che deve essere inserito nell'ambiente del quale si vuole misurare la temperatura e che fornisce una indicazione che dipende dalla temperatura assunta dall'elemento sensibile del termometro stesso. Lo studio della risposta a segnali variabili nel tempo permette di valutare come, e con che legge, temperatura dell'ambiente e temperatura del termometro, e cioè la sua indicazione, differiscano tra di loro.

Per studiare le leggi generali di funzionamento del termometro viene costruito un modello fisico molto semplificato, qui di seguito illustrato:

- il termometro viene supposto di materiale omogeneo
- il termometro è piccolo, per cui tutte le sue parti hanno una temperatura uniforme T_t
- la capacità termica del termometro è trascurabile rispetto alla capacità termica dell'ambiente nel quale verrà inserito per cui si può trascurare il suo effetto di carico
- il termometro è completamente inserito nell'ambiente del quale si vuole misurare la temperatura
- l'ambiente ha una temperatura uniforme T_a
- il termometro scambia energia solo per convezione e solo con l'ambiente del quale si vuole misurare la temperatura
- nel termometro non avvengono reazioni di tipo chimico od altro, e quindi la variazione della sua energia interna sarà sempre uguale alla energia che scambia con l'ambiente nel quale è inserito
- il principio fisico sfruttato per misurare la temperatura è tale per cui il valore dell'indicazione varia linearmente con la temperatura del termometro

in queste condizioni chiamando:

Q il calore scambiato tra ambiente e termometro, positivo se entrante nel termometro $[kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}]$

k il coefficiente di scambio termico convettivo tra ambiente e termometro $[kg \cdot s^{-3} \cdot ^\circ C^{-1}]$

S l'area di scambio termico fra ambiente e termometro $[m^2]$

c il calore specifico del materiale costituente il termometro $[m^2 \cdot s^{-2} \cdot ^\circ C^{-1}]$

m la massa del termometro $[kg]$

si potranno scrivere

- la equazione di trasmissione del calore tra ambiente e termometro: $dQ = k \cdot S \cdot (T_a - T_t) \cdot dt$

- la equazione di variazione della energia interna del termometro $dQ = c \cdot m \cdot dT_t$

ed essendo uguali, per una delle ipotesi dette, i due dQ , si giunge alla equazione:

¹⁰ Si vedrà che l'unica eccezione a questa affermazione è rappresentata dai pirometri ad irraggiamento.

$$\frac{c \cdot m}{k \cdot S} \cdot \frac{dT_t}{dt} + T_t = T_a \quad (3-1)$$

equazione differenziale del primo ordine a coefficienti costanti.

In questo caso il parametro caratteristico del sistema è il coefficiente moltiplicativo del termine differenziale, coefficiente che, dalla analisi dimensionale della equazione, risulta avere dimensione di tempo e viene chiamato costante di tempo τ

$$\tau = \frac{c \cdot m}{k \cdot S} \quad (3-2)$$

come già visto la analisi matematica ci insegna che l'equazione differenziale ha una soluzione composta dalla somma di due termini:

$$T_t = T_{tg} + T_{tp} \quad (3-3)$$

$$- T_{tg} = \text{integrale generale della omogenea associata} \quad \tau \cdot \frac{dT_t}{dt} + T_t = 0 \quad (3-4)$$

- T_{tp} = integrale particolare della equazione completa

Mentre T_{tg} esiste sempre, T_{tp} è ricavabile analiticamente solo per alcune particolari funzioni del termine a destra dell'uguale (forzante), con un caso particolarmente semplice da risolvere dato dalle funzioni esponenziale e armonica (seno, coseno).

a) Integrale generale della omogenea associata.

L'integrale generale della equazione omogenea associata vale:

$$T_{tg} = A \cdot e^{-t/\tau} \quad (3-5)$$

equazione nella quale la costante A deve essere trovata imponendo che l'equazione completa, integrale particolare più integrale generale della omogenea associata, soddisfi la condizione iniziale $T_t(t=0) = T_{t0}$

e quindi, nel caso di $T_a=0=\text{costante}$,

$$T_{tg} = T_{t0} \cdot e^{-t/\tau} \quad (3-6)$$

equazione riportata graficamente qui di seguito nell'ipotesi di $T_{t0} = 1$

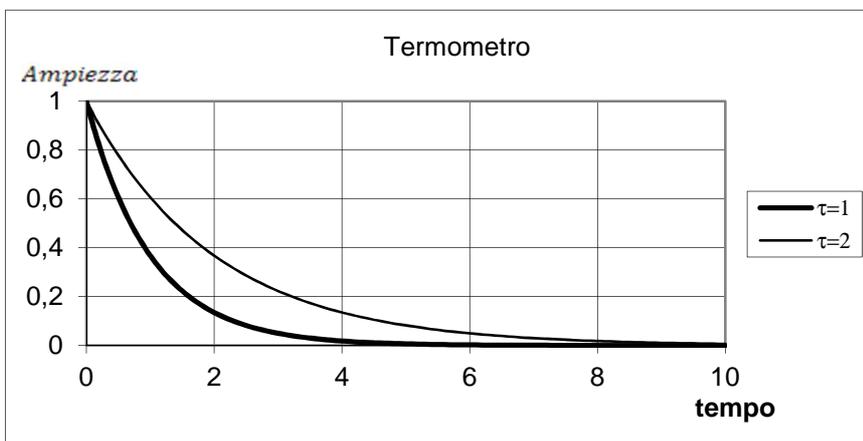


Fig. 10

b) Integrale particolare della equazione completa.

L'integrale particolare è ricavabile, come detto, solo in pochi casi e, per quanto già visto, risulta particolarmente utile esaminare il caso nel quale la temperatura dell'ambiente T_a vari con legge armonica (indicata quindi come T_{aa} temperatura ambiente avente legge armonica).

$$T_a = T_{aa} = \bar{T}_{aa} \cdot \cos \omega_a t \quad (3-7)$$

in questo caso la legge di variazione della temperatura del termometro data dall'integrale particolare, e cioè a regime, vale:

$$T_{tap} = \bar{T}_{aa} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega_a^2 \cdot \tau^2 + 1}} \cdot \cos(\omega_a t + \varphi_a) = \bar{T}_{aa} \cdot \Phi_a \cdot \cos(\omega_a t + \varphi_a) = \bar{T}_{tap} \cdot \cos(\omega_a t + \varphi_a) \quad (3-8)$$

con modulo del coefficiente di amplificazione:
$$\Phi_a = \frac{\bar{T}_{tap}}{\bar{T}_{aa}} = \frac{1}{\sqrt{\omega_a^2 \cdot \tau^2 + 1}} \quad (3-9)$$

e fase data dalla relazione:
$$tg \varphi_a = -\omega_a \cdot \tau \quad (3-10)$$

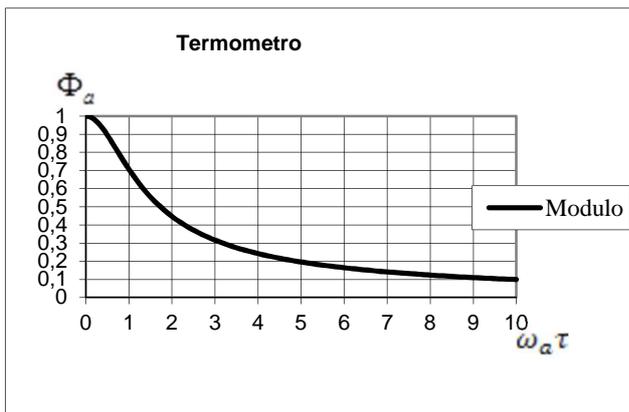


Fig. 11a (vedi nota ¹¹)

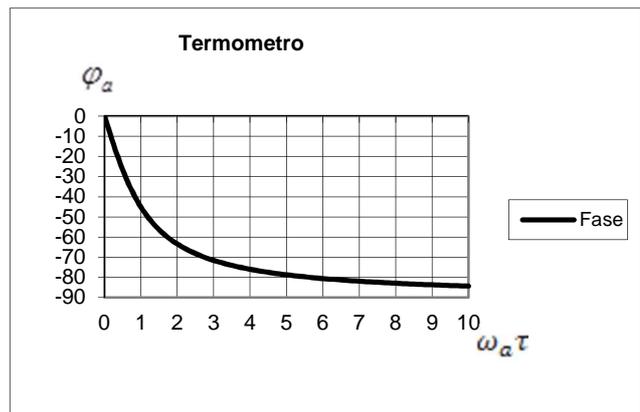


Fig. 11b

3.1 - Risposta di un termometro a segnali genericamente variabili nel tempo

Per studiare il comportamento del termometro bisogna seguire esattamente la procedura esaminata per il sismometro o l'accelerometro ovvero, schematicamente:

- individuare, tramite la serie di Fourier, le ampiezze e le frequenze delle armoniche presenti nella temperatura da misurare
- analizzare il comportamento del termometro, ovvero ricavare, a regime, T_{ta} (indicazione) quando T_{aa} (grandezza da misurare) varia con legge armonica; si devono cioè ricavare fase introdotta φ_a e coefficiente di amplificazione Φ_a

¹¹ Non si confondano il grafico di Fig. 10 coi grafici di Fig. 11 anche se sembrano simili: nel primo in ascissa c'è il tempo e rappresenta l'andamento della temperatura del termometro durante il transitorio di passaggio tra una temperatura iniziale supposta uguale ad uno ed una temperatura finale supposta uguale a zero; nel secondo in ascissa c'è la pulsazione (moltiplicata per τ) e rappresenta la funzione di trasferimento armonica ovvero, in funzione della pulsazione, la fase introdotta ed il modulo del rapporto, a regime, fra la temperatura del termometro e la temperatura dell'ambiente quando quest'ultima varia nel tempo con legge armonica.

- analizzare, al variare della costante di tempo τ , se il coefficiente di amplificazione Φ_a rimanga costante al variare della pulsazione in modo da non avere distorsione di ampiezza, e se la fase φ_a tra indicazione e grandezza da misurare soddisfi una delle tre condizioni di non distorsione e cioè se ha valore nullo, o valore pari a $-\pi$, o valore proporzionale alla pulsazione.

a) caratteristiche richieste ad un termometro per misurare correttamente una temperatura assegnata

Anche in questo caso si vede che, per qualunque valore della costante di tempo con cui verrà realizzato il termometro, non esisterà un termometro in grado di misurare correttamente una qualsiasi variazione di temperatura e che pertanto dovremo, per ogni termometro, scoprire quali caratteristiche dovranno avere le variazioni di temperatura per essere misurate correttamente, oppure come dovremo costruire un termometro in grado di misurare correttamente una particolare variazione di temperatura.

L'analisi della funzione di trasferimento armonico del termometro (equazioni 3-9 e 3-10, figure 11a e 11b) ci dice che non si avrà distorsione, né in ampiezza né in fase, maggiore del 5% se tutte le armoniche presenti nello sviluppo in serie della temperatura da misurare soddisfano la condizione: $\omega_a \cdot \tau \leq 0,3$ e quindi se $\omega_{sMax} \cdot \tau \leq 0,3$, mentre se l'errore massimo ammissibile scende all'1% la condizione da soddisfare diviene $\omega_{sMax} \cdot \tau \leq 0,1$. Si noti infine che per il fatto che la fase introdotta è diversa da zero, la misura risulta ritardata di un tempo pari a circa 1,5 volte τ .

Le condizioni esposte ci fanno vedere che per poter misurare correttamente temperature che variano con armoniche ad alta frequenza è opportuno costruire termometri con τ piccolo e che quindi, dall'esame della definizione di τ , bisogna:

- abbassare c , calore specifico del materiale costituente il termometro, che però ha un valore fissato dal fenomeno fisico utilizzato per misurare la temperatura. Non è modificabile,
- aumentare k , coefficiente di scambio termico convettivo tra ambiente e termometro, facendo muovere il fluido o agitando il termometro,
- aumentare S , area di scambio termico fra termometro e ambiente, (questa grandezza dipende dal quadrato di una dimensione caratteristica del termometro)
- abbassare m , massa del termometro, (questa grandezza dipende dal cubo di una dimensione caratteristica del termometro)

L'analisi di questi ultimi due parametri ci dice quindi che il rapporto m/S diminuisce al diminuire delle dimensioni del termometro.

In conclusione per poter misurare correttamente temperature genericamente variabili nel tempo sarà opportuno costruire termometri piccoli e, possibilmente, utilizzarli agitandoli nell'ambiente di misura.

Si noti infine che le dimensioni del termometro sono legate alla sua resistenza meccanica e che quindi se eccessivamente ridotte comporteranno elevati rischi di rottura. I termometri cioè dovranno essere di opportuna resistenza meccanica, e quindi grossi, qualora il fluido del quale si debba misurare la temperatura abbia elevato peso specifico, oppure si muova con elevata velocità o con turbolenza, oppure trasporti particelle solide.

Le trattazioni viste fino ad ora, che consideravano solo grandezze da misurare di tipo periodico, possono essere immediatamente estese come detto anche a segnali genericamente variabili nel tempo. Tutte le considerazioni fino ad ora sviluppate rimarranno valide con la sola avvertenza che la pulsazione fondamentale ω_1 prima trovata, di valore finito, degenererà in una pulsazione infinitesima

$d\omega$, e che quindi la serie (sommatoria) di Fourier si trasformerà nella più generale trasformata (integrale) di Fourier.

3.2 - Termometri e segnali variabili nel tempo con andamento particolare

a) Segnale a gradino

Nelle misure di temperatura il caso di segnale a gradino è particolarmente di interesse perché riproduce tutte le situazioni nelle quali un termometro inizialmente a regime ad una certa temperatura viene, quasi istantaneamente, inserito nell'ambiente di misura; sono i casi, solo a titolo di esempio, del termometro clinico inizialmente a temperatura ambiente che viene messo sotto l'ascella del paziente per misurarne la febbre, il caso del termometro a regime in una stanza riscaldata che viene portato all'aria aperta per misurare la temperatura esterna, etc.

Lo studio della risposta dello strumento di misura potrebbe essere condotto mediante la trasformata di Fourier, ma risulta molto più semplice constatare che la risposta al segnale a gradino, a parte il valore delle condizioni iniziali, è esattamente quella studiata per ricavare l'integrale generale della omogenea associata, e quindi, se è $T_i(t=0)=T_{ain}$ la temperatura iniziale del termometro, uguale a quella dell'ambiente nel quale è originariamente inserito, e T_{afin} la temperatura, costante, dell'ambiente di misura, la legge di variazione della temperatura del termometro per $t>0$, ovvero dopo l'inserimento del termometro nel nuovo ambiente, vale:

$$T_t = T_{afin} - (T_{afin} - T_{ain}) \cdot e^{-t/\tau} \quad (3-11)$$

In questa situazione risulta di interesse conoscere dopo quanto tempo la temperatura del termometro, e quindi la sua indicazione, differiscono dalla temperatura dell'ambiente per meno dell'errore massimo ammissibile; questo tempo viene chiamato tempo di risposta, è funzione dell'errore ammesso e cresce linearmente con la costante di tempo τ del termometro.

Chiamando ε il valore della differenza tra temperatura finale dell'ambiente e temperatura del termometro $\varepsilon = T_{afin} - T_t$ si ottiene: $t/\tau = \ln((T_{afin} - T_{ain}) / \varepsilon)$

elencato nella tabella seguente nella quale viene evidenziato come la differenza tra indicazione e temperatura a regime decresca nel tempo.

t/τ	$\varepsilon / (T_{afin} - T_{ain})$
0,1	90,48%
0,2	81,87%
0,5	60,65%
1	36,79%
2	13,53%
3	4,98%
4	1,83%
5	0,67%
6	0,25%

Tab. 2

Ad esempio, pensando ad un termometro clinico e ipotizzando:

temperatura iniziale del termometro $T_{ain} = 22 \text{ }^\circ\text{C}$

temperatura da misurare $T_{afin} = 37 \text{ }^\circ\text{C}$ ($\Rightarrow T_{afin} - T_{ain} = 15 \text{ }^\circ\text{C}$)

errore accettabile dal medico $\varepsilon = 0,1 \text{ }^\circ\text{C}$ ($\Rightarrow T_t - T_{afin} = \varepsilon = 0,1 \text{ }^\circ\text{C} \Rightarrow \varepsilon / (T_{afin} - T_{ain}) = 0,0066 = 0,66 \%$)

risulta che dovremo attendere un tempo t_r , tempo di risposta, pari a

$$\tau \cdot \ln((T_{\text{afin}} - T_{\text{ain}})/\epsilon) = \tau \cdot \ln((37-22)/0,1) = \tau \cdot 5$$

ovvero almeno 5 volte la costante di tempo τ , per avere l'indicazione corretta. Se siamo però in un ambiente non riscaldato ($T_{\text{ain}} = 5 \text{ }^\circ\text{C}$) e abbiamo una febbre da cavallo ($T_{\text{afin}} = 40 \text{ }^\circ\text{C}$) risulta

$\epsilon / (T_{\text{afin}} - T_{\text{ain}}) = 0,29 \%$ dovremo adattarci ad un tempo di risposta almeno pari a sei volte il valore della costante di tempo τ . Concretamente se abbiamo il termometro della nonna, bello grande, dovremo attendere una diecina di minuti, con piccoli termometri 1 minuto, con sensori ottici piccolissimi, pochi secondi.

4.0 - Problemi generali dell'adeguamento della risposta in frequenza

Dall'analisi effettuata sino ad ora, risulta evidente che, come sempre succede nei problemi dell'ingegneria, l'adattamento degli strumenti di misura per consentirne l'utilizzo con segnali variabili nel tempo porta a controindicazioni non sempre accettabili:

- per riuscire a misurare con un sismometro spostamenti a bassa frequenza, bisogna costruirlo pesante ed ingombrante
- per riuscire a misurare con un accelerometro accelerazioni ad alta frequenza, se ne deve diminuire la sensibilità
- per poter misurare correttamente temperature variabili nel tempo, il termometro deve essere piccolo con conseguenti rischi di rotture;
- nel caso di termometro a mercurio, diminuire la massa comporta la diminuzione dell'innalzamento del mercurio nel capillare e quindi la diminuzione della sensibilità
- nel caso di termometro a bilamina, diminuire la massa equivale a ridurre la forza che la bilamina può esercitare e quindi ridurre l'utilità del termometro se viene utilizzato come attuatore
- per poter misurare pressioni variabili nel tempo con un manometro a colonna di fluido, bisogna limitarne il fondo scala

e limitazioni analoghe si trovano in tutti gli strumenti di misura; ne segue che non sarà mai possibile costruire ed utilizzare un solo strumento di misura progettato per la misura di grandezze comunque variabili nel tempo ma si dovranno progettare e costruire diversi strumenti, con diverse caratteristiche dinamiche, e sarà cura dell'utilizzatore finale la scelta dello strumento che non distorca il particolare segnale che deve essere misurato ma che contemporaneamente abbia in minima misura gli inconvenienti descritti.

Ad esempio mentre un solo accelerometro con $\omega_n = 200 \text{ kHz}$ sarebbe adatto a misurare tutte le accelerazioni che si possono trovare nelle applicazioni comuni, sono costruiti accelerometri con ω_n pari a 1, 10, 35, 50, 100, 200kHz per consentire appunto la scelta della combinazione ottimale delle caratteristiche di sensibilità e distorsione.

5.0 - Verifica del modello

In questa lezione sono state esaminate le metodologie per lo studio della risposta dinamica degli strumenti di misura mediante soluzione delle equazioni differenziali descrittive dei loro rispettivi modelli dinamici. Apparentemente sembrerebbe che questo approccio analitico sia sufficiente per risolvere completamente il problema ma si deve sempre aver presente che tutti i parametri costitutivi dei modelli hanno valori che debbono essere ricavati sperimentalmente e che il modello deve essere validato sperimentalmente.

a) determinazione dei parametri

Ovviamente i valori dei parametri utilizzati nelle varie espressioni via via scritte debbono essere determinati sperimentalmente con metodologie che tengano conto della loro definizione fisica ma anche delle regole di determinazione dell'incertezza composta.

Fra i numerosi esempi pensabili consideriamo la determinazione della pulsazione propria di un sistema vibrante ad 1 grado di libertà che, come detto, vale $\omega_n = \sqrt{K/m}$

questa quantità può essere ricavata in numerosi modi; i due più immediati sono:

- 1 - valutando separatamente valore ed incertezza di misura di K (con due misure: una di spostamento ed una di forza) e di m (con una bilancia) ed eseguendo poi i calcoli per la determinazione del valore di ω_n e della sua incertezza (calcolo della incertezza composta)
- 2 - provocando una oscillazione libera del sistema, misurando con un cronometro il periodo di oscillazione T, calcolando quindi $\omega_n = 2\pi / T$ e valutando la sua incertezza di misura

Si vede subito che entrambe le procedure di misura non sono esenti da imprecisioni:

- nella prima non sarà in generale corretto che possa essere trascurata la massa della molla; non sarà in generale corretto che possa essere trascurata la cedevolezza dell'attacco massa-molla; alla incertezza di misura dei parametri, ben determinabile, bisognerà aggiungere l'incertezza dovuta alla diversità fra modello e sistema fisico reale; come risultato finale, la procedura teorica darà risultati di bassa accuratezza
- la seconda procedura è relativamente semplice ed ha buona accuratezza se lo smorzamento globale del sistema è piccolo e quindi se, in seguito ad una perturbazione dalla posizione di equilibrio, si hanno numerosi cicli di oscillazione (tenendo presente, ovviamente, che la pulsazione misurata non sarà la pulsazione propria ma la pulsazione del sistema smorzato $\omega_{nh} = \omega_n \sqrt{1-h^2}$). L'accuratezza però crolla se lo smorzamento non è piccolo in quanto bisognerà misurare il periodo su pochi cicli, al limite uno soltanto.

Solo una grande esperienza ed abilità sperimentale potrà portare alla scelta della metodologia migliore, solo un apparato di misura ben progettato e realizzato porterà a valori numerici caratterizzati da un valore di incertezza limitato.

b) verifica sperimentale del modello fisico-matematico

Anche qualora i vari parametri siano stati ricavati con grande accuratezza, rimane sempre il dubbio che, nella realizzazione del modello fisico-matematico, siano stati mal valutati, o addirittura trascurati, alcuni fenomeni fisici capaci di modificare i risultati ottenuti.

Mentre l'approccio analitico è utilissimo per permetterci di capire l'influenza dei vari parametri sul comportamento dinamico dello strumento di misura indicandoci gli effetti indotti da un loro cambiamento, risulta essenziale una verifica sperimentale "globale" della risposta dinamica dello strumento al fine di validare il modello.

La verifica sperimentale globale può essere realizzata in molti differenti modi a seconda della tipologia dello strumento di misura, a seconda dell'apparato sperimentale disponibile.¹²

Ad esempio, per verificare il modello di un termometro sarà abbastanza facile realizzare una variazione a gradino della temperatura dell'ambiente nel quale è immerso il termometro e registrare l'andamento nel tempo della temperatura indicata.

Un primo risultato importante sarà ottenuto dalla verifica che la legge di variazione della temperatura abbia l'andamento esponenziale negativo determinato dalla formula $T_t = T_{afin} - (T_{afin} - T_{ain}) \cdot e^{-t/\tau}$; in questo caso sarà possibile ricavare facilmente la costante di tempo τ mediante, ad esempio, una procedura di calcolo dei minimi quadrati calcolati sulla differenza, valutata in corrispondenza di istanti successivi, tra valore ricavato dalla equazione e valore misurato.

Potrebbe però capitare che l'andamento non sia descrivibile con una esponenziale negativa e questo potrebbe indicare, ad esempio, che:

- i parametri non rimangono costanti nel tempo,
- il comportamento del sistema non è lineare,
- non è trascurabile l'effetto di carico dello strumento di misura
- il modello corretto non è descritto da una equazione differenziale del primo ordine ma da una equazione differenziale di ordine superiore.¹³
-

E' chiaro che, in questi casi, si dovrà ripensare il modello aggiungendo i fattori correttivi che consentano di ottenere risultati analitici coerenti con quelli sperimentali.

¹² Si noti che, ad esempio, la procedura di taratura degli accelerometri certificata nel Politecnico di Milano assicura una incertezza relativa pari al 2%

¹³ Si veda ad esempio su Doebelin a pag. 634 l'influenza della presenza di eventuali guaine di protezione sulla risposta dinamica dei termometri e sull'ordine dell'equazione differenziale che ne definisce il comportamento.