Approfondimento

Si va a dimostrare come un rotore eccentrico che ruota a velocità costante, il cui statore resta solidale con la trave, è equivalente ad una forzante esterna armonica applicata sul sistema.

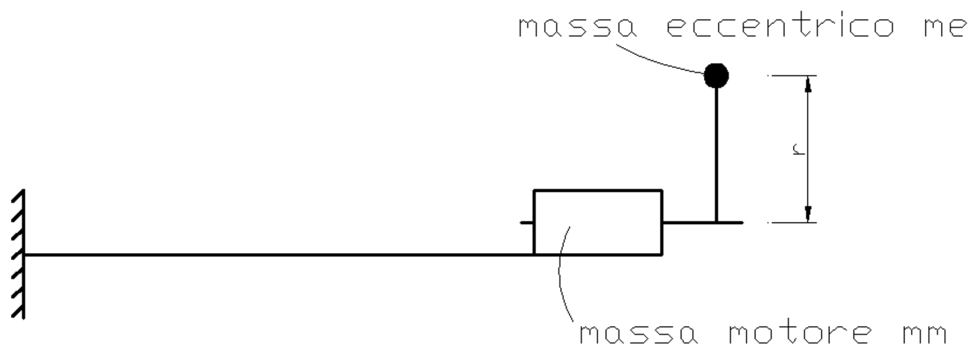


Figura 1 Asta incastrata con eccentrico

Consideriamo l'estremo libero e modelliamo la trave come un sistema ad un grado di libertà (Figura 2, a sinistra). Non consideriamo lo smorzamento strutturale.

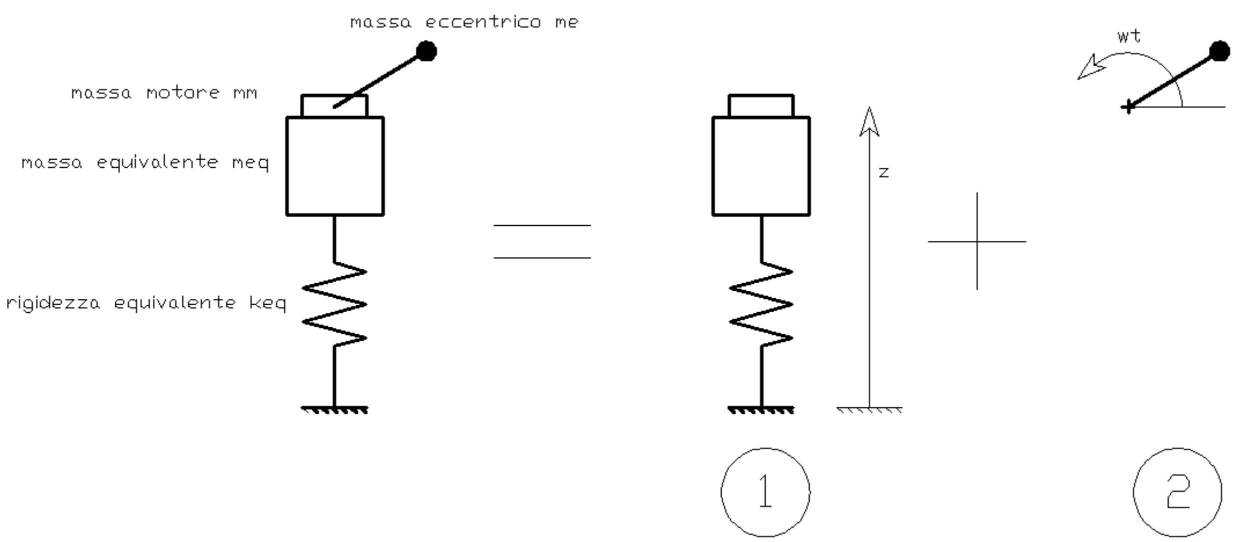


Figura 2 Modellazione del sistema meccanico come un sistema a 1+1 gradi di libertà (uno libero e uno vincolato)

In cui si può dimostrare che:

$$k_{eq} = \frac{3EJ}{l^3}$$

$$m_{eq} = 0.24 \cdot m_{asta}$$

Scomponiamo il sistema in due sottosistemi come mostrato in Figura 2 (a destra).

Applichiamo a questo punto l'equazione di Lagrange per scrivere l'equazione di moto del sistema:

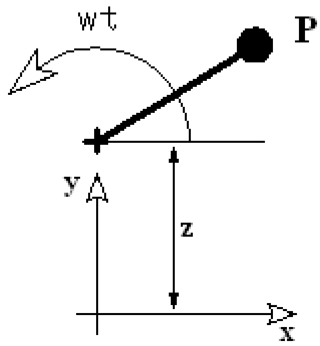
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = Q$$

In cui la coordinata libera q è rappresentata da z di Figura 2.

ENERGIA CINETICA DEL PRIMO SOTTOSISTEMA

$$E_c^1 = \frac{1}{2}\left(m_{eq} + m_m\right)\dot{z}^2$$

ENERGIA CINETICA DEL SECONDO SOTTOSISTEMA



$$x_P = r\cos(\omega t) \qquad \dot{x}_P = -r\omega sen(\omega t)$$
$$y_P = rsen(\omega t) + z \qquad \dot{y}_P = r\omega\cos(\omega t) + \dot{z}$$
$$v_P^2 = \dot{x}_P + \dot{y}_P = r^2\omega^2 + \dot{z}^2 + 2r\omega\cos(\omega t)$$

$$E_c^2 = \frac{1}{2}m_e\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_e\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_e 2r\omega\dot{z}\cos(\omega t)$$

ENERGIA CINETICA TOTALE

$$E_c = \frac{1}{2}m_{TOT}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_e\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_e 2\dot{z}r\omega\cos(\omega t)$$

POTENZIALE GRAVITAZIONE: trascurabile

POTENZIALE ELASTICO

$$V = \frac{1}{2}k_{eq}z^2$$

COMPONENTE LAGRANGIANA DELLA SOLLECITAZIONE ATTIVA

$Q = 0;$ (non esistono forzanti esterne al sistema)

TERMINI EQUAZIONE DI LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial z} = m_{TOT}\ddot{z} - m_e r\omega^2 sen(\omega t)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = k_{eq}z$$

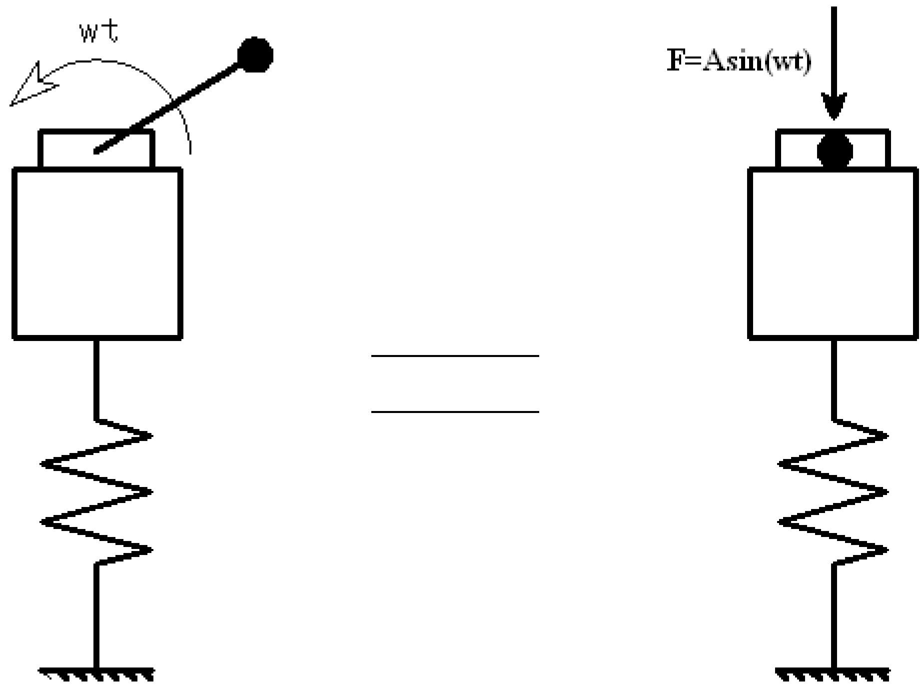
EQUAZIONE DI MOTO

$$m_{TOT}\ddot{z} - m_e r\omega^2 sen(\omega t) + k_{eq}z = 0;$$

cioè:

$$m_{TOT}\ddot{z} + k_{eq}z = m_e r\omega^2 sen(\omega t);$$

A destra dell’uguale otteniamo un forzamento equivalente dato dall’eccentricità in rotazione:


wt
F=Asin(wt)