

POLITECNICO DI MILANO

Misure Meccaniche e Termiche

Espressione della misura ed incertezza

Ing. Lorenzo Comolli

2

### Espressione della misura

Una MISURA è una informazione costituita da (UNI 4546):

- Numero
- Incertezza (con il livello di confidenza, espressa secondo GUM)
- Unità di misura

E' OBBLIGATORIO esprimere l'incertezza della misura

Esempio:  $L = 32.37 \pm 0.25 \text{ m}$  (l.c. 68%)

Incertezza nelle misure dimensionali POLITECNICO DI MILANO

3

### Incetezza

Definizioni da GUM, ISO 1995:

**INCERTEZZA:** parametro, associato al risultato di una misurazione, che caratterizza la dispersione dei valori ragionevolmente attribuibili al misurando.

**INCERTEZZA TIPO:** incertezza del risultato di una misurazione espressa come scarto tipo.

Incertezza nelle misure dimensionali POLITECNICO DI MILANO

4

### Tipi di incetezza

Esistono diversi modi per valutare l'incetezza. Si possono suddividere principalmente in:

- **Tipo A:** fa uso di un modello statistico
- **Tipo B:** non fa uso di un modello statistico

Entrambi i tipi di valutazione sono basati su *distribuzioni di probabilità* e le componenti risultanti da ambedue i metodi sono quantificate mediante scarti tipo.

Metodo di valutazione:

- incetezza tipo A: ottenuta da una *densità di probabilità* derivata da una *distribuzione di frequenza osservata*;
- incetezza tipo B: ottenuta da una *densità di probabilità ipotizzata* sulla base delle conoscenze della persona che esegue la misura.

Incertezza nelle misure dimensionali POLITECNICO DI MILANO

5

### Tipi di incetezza

Definizioni da GUM, ISO 1995:

**VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA DI TIPO A:** metodo di valutazione dell'incetezza per mezzo dell'analisi statistica di serie di osservazioni.

**VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA DI TIPO B:** metodo di valutazione dell'incetezza con mezzi diversi dall'analisi statistica di serie di osservazioni.

Incertezza nelle misure dimensionali POLITECNICO DI MILANO

6

### Metodo di valutazione dell'incetezza di tipo A

Analisi statistica di una serie di letture:

- n: numero di letture (indipendenti)
- $x_k$ : valore della k-esima lettura

**Distribuzioni di probabilità** più utilizzate:

- *distribuzione gaussiana*, se le letture sono molte;
- *T-student*, se il numero di letture è inferiore a 20.

La miglior *stima del valore atteso* è il **valore medio** delle letture:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

Incertezza nelle misure dimensionali POLITECNICO DI MILANO

## Metodo di valutazione dell'incertezza di tipo A

7

La miglior stima della deviazione standard della popolazione di letture è la deviazione standard sperimentale (detta anche scarto tipo sperimentale):

$$s(x_k) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Questa grandezza esprime la variabilità dei valori osservati  $x_k$ , cioè la loro dispersione intorno al valor medio.

L'unità di misura di questa grandezza è la stessa del valore medio.

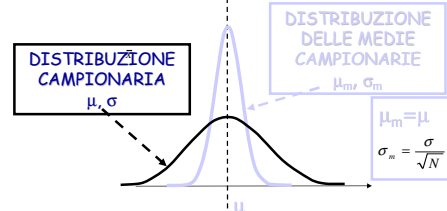
## Metodo di valutazione dell'incertezza di tipo A

8

La miglior stima della deviazione standard della popolazione dei valori medi (che quindi è l'incertezza tipo  $u$ ), è data da:

$$u = s(\bar{x}) = \frac{s(x_k)}{\sqrt{n}}$$

NOTA: al crescere del numero di letture  $n$ , la dev. st. della media diminuisce.



## Metodo di valutazione dell'incertezza di tipo B

9

Metodo di valutazione dell'incertezza con mezzi diversi dall'analisi statistica di serie di letture.

Viene dato un "giudizio scientifico" basato su tutte le informazioni disponibili sulla possibile variabilità di  $x$ .

L'insieme di informazioni può comprendere:

- risoluzione dello strumento;
- dati di misurazione precedenti;
- esperienza o conoscenza generale dello strumento;
- specifiche tecniche del costruttore;
- dati forniti in certificati di taratura;
- incertezze assegnate a valori di riferimento presi da manuali.

## Incertezza di tipo B: esempio

10

RIGHELLO CON SCALA GRADUATA (risoluzione 1 mm):

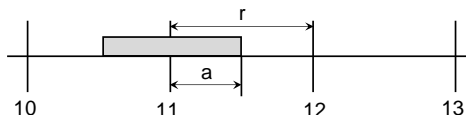


Si esegue una lettura: risultato 11. Cosa significa?  
Che il valore del misurando  $x$  è  $10.5 < x < 11.5$

Nell'intervallo (10.5, 11.5) tutti i valori sono equamente probabili, la funzione distribuzione di probabilità è una costante nell'intervallo, nulla fuori. Distribuzione di probabilità rettangolare (o equiprobabile).

## Incertezza tipo B: esempio

11



$r$ : risoluzione

$a=r/2$ : accuratezza, semiampiezza dell'intervallo

La densità di probabilità vale:  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{nell'intervallo} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Lo scarto tipo (e quindi l'incertezza tipo  $u$ ) vale  $u = \sigma = \frac{r}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

## Sceita dell'incertezza

12

Qualora sia possibile calcolare l'incertezza sia con metodo di tipo A che B, quale bisogna scegliere?

La risposta non è semplice, tanto che la normativa non fornisce risposte.

• **Criterio semplice:** il valore più grande tra incertezza A o B.

Esempio: se si ottenessero 20 misure tutte uguali (o quasi), la deviazione standard risulterebbe nulla (o quasi) e quindi anche l'incertezza di tipo A. Questo ovviamente non ha senso e si deve scegliere di utilizzare il tipo B.

• **Criterio rigoroso:** si sfruttano metodologie statistiche.

In generale: si confronta lo scarto tipo dei dati (non della media) e l'incertezza tipo valutata con trattazione B; se il primo è significativamente maggiore di quest'ultimo (4-5 volte) non vi è prevalente effetto sistematico e quindi è corretto effettuare una valutazione di tipo A.

Esempio 1: l'osservazione dell'istogramma delle letture mostra che più del 30% delle letture cade nella colonna centrale, tale distribuzione non è approssimabile a una gaussiana e pertanto la trattazione dell'incertezza di tipo A non è applicabile.

Esempio 2:  $s=3$ ,  $u_B=1$ ,  $n=10$ ,  $s > 4u_B$ ? NO allora uso tipo B,  $u=1$

Esempio 3:  $s=6$ ,  $u_B=1$ ,  $n=10$ ,  $s > 4u_B$ ? SI allora uso tipo A,  $u = \frac{s}{\sqrt{10}} = 1.9$



## Incertezza Combinata

13

Nella maggioranza dei casi il misurando Y non viene misurato direttamente, ma calcolato mediante altre N grandezze  $x_1, x_2, \dots, x_N$  attraverso una relazione funzionale f:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Posto che tali ingressi  $x_1, x_2, \dots, x_N$  siano una serie di valori di altri misurandi e/o parametri, affetti ognuno da una incertezza di tipo A o di tipo B  $u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_N}$ , come si fa a calcolare l'incertezza del misurando  $u_y$ ?

## Incertezza Combinata: legge di propagazione dell'incertezza

14

E' necessario applicare la legge di propagazione dell'incertezza:

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_{x_i}^2}$$

pesi

incertezze dei singoli ingressi

Vale solo se non c'è *correlazione* tra le variabili in ingresso.

## Incertezza relativa

15

INCERTEZZA RELATIVA: valore dell'incertezza espressa come **percentuale rispetto alla misura**.

$$u_{rel,x} = \frac{u_x}{x}$$

Esempio:

misura: 95.00 mm  $\pm$  0.29 mm (scrittura assoluta)

incertezza relativa:

$$u_{rel} = 0.29 \text{ mm} / 95 \text{ mm} = 0.0031 = 0.31\%$$

misura: 95.00 mm  $\pm$  0.31% (scrittura relativa)

## Incertezza Combinata: legge di propagazione dell'incertezza

16

Qualora la relazione funzionale sia una produttoria del tipo:

$$y = \prod_{i=1}^N x_i^{m_i}$$

allora si può ricavare:

$$u_{c,rel}(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (m_i u_{x_i,rel})^2}$$

dove:

$m_i$ : esponente con cui la grandezza  $x_i$  compare nella produttoria.

## Incertezza combinata: esempio, calcolo dell'area di un rettangolo, usando l'incertezza assoluta

DATI LUNGHEZZA  $l=50$  mm  $u_c(l)=1$  mm  
LARGHEZZA  $b=35$  mm  $u_c(b)=0.5$  mm

Area =  $b \cdot l = 1750$  mm<sup>2</sup>;

$$\frac{\partial A}{\partial l} = b \qquad \frac{\partial A}{\partial b} = l$$

$$u_c(A) = \sqrt{l^2 \cdot u_c(b)^2 + b^2 \cdot u_c(l)^2} = 43 \text{ mm}^2$$

Misura: Area = (1750  $\pm$  43) mm<sup>2</sup>

## Incertezza combinata: esempio, calcolo dell'area di un rettangolo, usando l'incertezza relativa

DATI LUNGHEZZA  $l=50$  mm  $u_c(l)=1$  mm  
LARGHEZZA  $b=35$  mm  $u_c(b)=0.5$  mm

Area =  $b \cdot l = 1750$  mm<sup>2</sup>

Incetuzze relative:  $u_{rel}(l)=1/50=0.0200$   $m_l=1$   
 $u_{rel}(b)=0.5/35=0.0143$   $m_b=1$

$$u_{c,rel}(A) = \sqrt{(m_b u_{rel}(b))^2 + (m_l u_{rel}(l))^2} = 0.0246$$

$$u_c(A) = u_{c,rel}(A) \cdot A = 0.0246 \cdot 1750 \text{ mm}^2 = 43 \text{ mm}^2$$

Misura: Area = 1750 mm<sup>2</sup>  $\pm$  2.5%  
Area = (1750  $\pm$  43) mm<sup>2</sup>

## Regole di scrittura

Corretto:

Area =  $1750 \text{ mm}^2 \pm 43 \text{ mm}^2$   
 Area =  $(1750 \pm 43) \text{ mm}^2$   
 Area =  $1750(43) \text{ mm}^2$   
 Area =  $1750 \text{ mm}^2 \pm 2.5\%$   
 Area =  $1.750 \cdot 10^3 \text{ mm}^2 \pm 0.043 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$   
 Area =  $(1.750 \pm 0.043) \cdot 10^3 \text{ mm}^2$

**ATTENZIONE al numero di cifre !**

Errato:

Area =  $1750,0000000 \text{ mm}^2 \pm 43,01162634 \text{ mm}^2$   
 Area =  $1750 \text{ mm}^2 \pm 2,4578072\%$  Troppe cifre (max 2)  
 Area =  $(1,75) \cdot 10^3 \text{ mm}^2 \pm (0,043) \cdot 10^3 \text{ mm}^2$  # cifre ≠  
 Area =  $(1,7 \cdot 10^3) \text{ mm}^2 \pm 43 \text{ mm}^2$  # cifre ≠  
 Area =  $(1,75 \pm 0,043) \cdot 10^3 \text{ mm}^2$  # cifre ≠

Nei calcoli è consigliato mantenere un certo numero di cifre, nella scrittura finale della misura è obbligatorio ridurle a 2.

## Regole di scrittura

Risultati calcoli: Area =  $1750.000 \text{ mm}^2$  ;  $i_{\text{tipo}} = 43.050 \text{ mm}^2$

Procedura di scrittura:

- scegliere l'unità di misura  
Area =  $(\dots \pm \dots) \text{ mm}^2$
- scrivere l'incertezza con 2 cifre significative (e il suo livello di confidenza)  
Area =  $(\dots \pm 43) \text{ mm}^2$  (l.c. 68%)
- scrivere il numero con lo stesso numero di cifre dopo la virgola dell'incertezza  
Area =  $(1750 \pm 43) \text{ mm}^2$  (l.c. 68%)

## Incertezza estesa

21

Definizioni da GUM, ISO 1995:

E' la grandezza che definisce, intorno al risultato di una misurazione, un intervallo che ci si aspetta comprendere una frazione rilevante della distribuzione di valori ragionevolmente attribuibili al misurando.

L'incertezza estesa U si ottiene moltiplicando l'incertezza tipo u per un opportuno fattore di copertura k.

$$U = k u$$

## Incertezza estesa

22

Lo scopo dell'incertezza estesa è la costruzione di un intervallo di valori che contenga il misurando con la confidenza (cioè probabilità) desiderata.

Si noti che il valore del misurando è fisso (anche se incognito); la variabile aleatoria sono gli estremi dell'intervallo della misura.

Un livello di confidenza del 95% significa che, ripetendo 100 volte n misurazioni (n = costante), 95 intervalli su 100 contengono il misurando.

Intervallo:  $(x - k u, x + k u)$

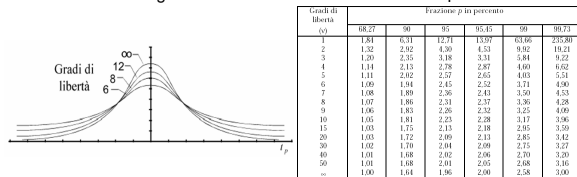
## Incertezza estesa

23

Il legame fra fattore di copertura e livello di confidenza dipende dalla distribuzione probabilistica considerata:

FATTORI DI COPERTURA				
	68%	90%	95%	99%
Gaussiana	1.000	1.645	1.960	2.576
Student (n=10)	1.050	1.810	2.230	3.170
Student (n=50)	1.010	1.680	2.010	2.680
Student (n=100)	1.005	1.660	1.984	2.626

NB: i valori della gaussiana coincidono con la t-Student per  $n \rightarrow \infty$



## Incertezza combinata estesa

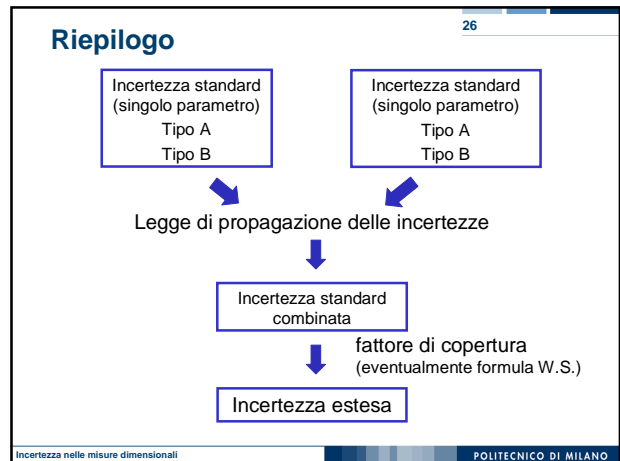
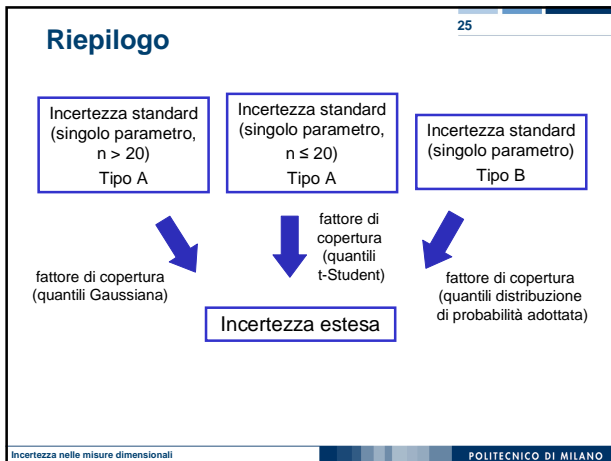
24

Come si sceglie invece il fattore di copertura in caso di incertezza combinata?

Per prima cosa si valutano i g.d.l. complessivi  $v_{\text{eff}}$  mediante la formula di Welch-Satterthwaite:

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_y^4}{\sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u_{x_i}\right)^4}{v_i}}$$

dove  $v_i$  sono il numero di g.d.l. della grandezza  $x_i$ .



## Traccia del lavoro in aula

**Parte 1:**

- determinare le caratteristiche degli strumenti (fondo scala, risoluzione, marca, modello, ...)

	CALIBRO	MICROMETRO	COMPARATORE
Marca			
Modello			
Fondo scala			
Risoluzione			

- imparare ad usare gli strumenti (nonio, ...)
- misurare la boccia: scegliere quali dimensioni misurare e scegliere con quale strumento; quindi eseguire 20 letture per ciascuna grandezza.

Incertezza nelle misure dimensionali POLITECNICO DI MILANO

## Traccia del lavoro in aula

**Parte 2:**

- ricavare la MISURA delle grandezze scelte
  - valore medio: miglior stima del valore vero
  - incertezza tipo A e tipo B, scegliere con criterio una delle due
- ricavare la MISURA di alcune grandezze derivate:
  - volume
  - massa (nota la massa volumica  $2700 \text{ kg/m}^3$ ). Esprimerle come
  - incertezza combinata tipo
  - incertezza combinata estesa con l.c. 95%.

Incertezza nelle misure dimensionali POLITECNICO DI MILANO

## Guida alla stesura della relazione

**Parti che la relazione deve contenere:**

- scopo del lavoro (ad es. determinare la misura di alcune grandezze)
- strumenti di misura utilizzati (con tutti i dettagli specifici)
- descrizione dei metodi applicati (per mettere in grado altri di ripetere esattamente le stesse operazioni)
- risultati ottenuti (serie di letture)
- analisi dei risultati: distribuzione delle letture (istogrammi)
- elaborazione dei risultati: calcolare le misure ( $=\text{num}+\text{inc}+\text{udm}$ ) delle grandezze di interesse, con incertezze tipo e estese.

NB: rispettare le normative (UNI 4536, GUM, VIM, Sistema Internazionale): regole di scrittura, cifre significative, nomenclatura, etc...

Incertezza nelle misure dimensionali POLITECNICO DI MILANO