POLITECNICO DI MILANO

Misure Meccaniche e Termiche

Trasformata di Fourier al calcolatore (FFT) e funzione di trasferimento sperimentale (FdT)

Ing. Lorenzo Comolli

Introduzione

Scopo del laboratorio:

1. imparare a eseguire la trasformata di Fourier al calcolatore (FFT), usando sia segnali simulati che quelli misurati in precedenza.
2. determinare la funzione di trasferimento sperimentale (FdT) della trave incastrata misurata in precedenza.

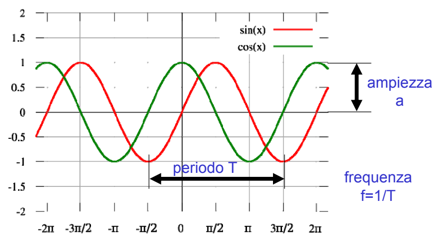
PARTE 1: trasformata di Fourier al calcolatore (FFT)

Funzione periodica

Caratteristica: la funzione h(t) si ripete identica dopo un tempo T (periodo):

h(t)=h(t±T) *per ogni t*

Esempio: funzioni sen(α) e cos(α), periodiche di periodo 2π



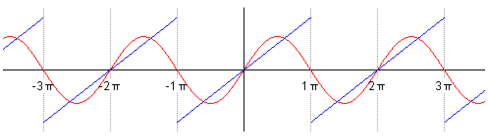
Serie di Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

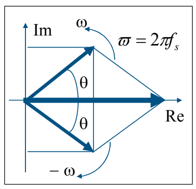
Ogni funzione periodica può essere scomposta nella somma di infinite funzioni seno e coseno.

$$h(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos(2\pi f_k t) + b_k \sin(2\pi f_k t)\right)$$

Esempio: funzione a dente di sega ottenuto dalla somma delle prime 5 componenti armoniche (animazione).



Serie di Fourier in forma esponenziale



Scrittura della funzione coseno in forma esponenziale:

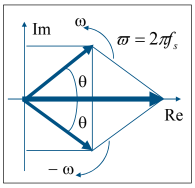
$$\cos(2\pi f_s t) = \frac{e^{j2\pi f_s t} + e^{-j2\pi f_s t}}{2}$$

$$\sin(2\pi f_s t) = \frac{e^{j2\pi f_s t} - e^{-j2\pi f_s t}}{2j}$$

Serie di Fourier in forma esponenziale:

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi f_k t}$$

Calcolo dei coefficienti della serie di Fourier



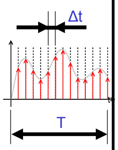
Calcolo coefficienti:

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} h(t)\cdot e^{-j2\pi k f_k t}\cdot dt$$

Vettore rotante con $\varpi_{vr} = -2\pi k f_k$

Segnale: è possibile scomporlo in somma di esponenziali

La trasformata di Fourier discreta (DFT)



La serie di Fourier si applica a segnali continui nel tempo, ma i segnali acquisiti col campionamento A/D sono discretizzati ad intervalli Δt e osservati N volte per un tempo T limitato.

Si usa quindi la trasformata discreta di Fourier (DFT).

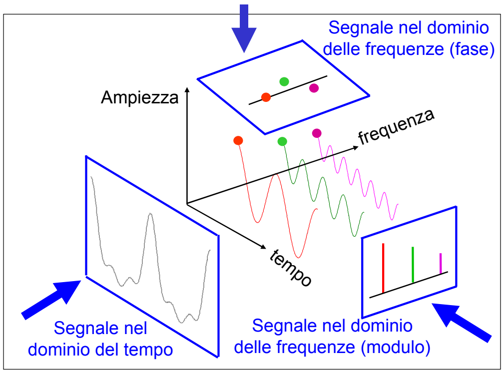
Calcolo dei coefficienti della trasformata di Fourier discreta:

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad k = 0,\dots,N-1$$

Per il calcolo della DFT sono richieste N^2 operazioni aritmetiche.

Sono stati sviluppati algoritmi più veloci (chiamati FFT, fast fourier transform), che richiedono molte meno operazioni, tipicamente N log(N).

La trasformata di Fourier, come una vista dei segnali da una diversa prospettiva



COME SI ESEGUE LA FFT

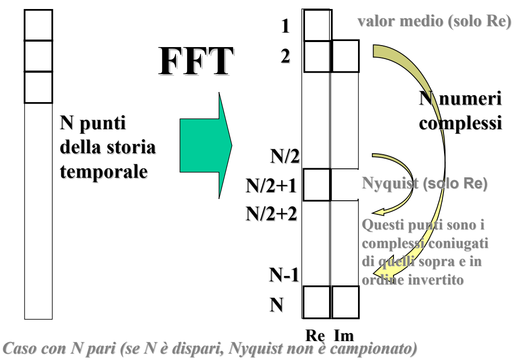
Come si esegue operativamente la FFT?

- Funzione FFT: presente in tutti gli ambienti di calcolo numerico (es. Matlab, Excel, C++, etc...); non viene però fornito direttamente lo spettro.
- Algoritmo di Cooley-Tukey: ideato da J.W.Cooley e J.W.Tukey nel 1965, nella versione standard accetta solo storie temporali composte da un numero di punti pari a 2^n. In tal modo vengono sfruttate le simmetrie delle funzioni circolari per eseguire più rapidamente le operazioni.
- Algoritmi moderni: successivamente sono stati introdotti nuovi algoritmi di FFT (ad es. FFTW.org) che accettano un numero di campioni qualsiasi. Questo ha reso possibile eseguire il calcolo di storie qualsiasi in tempi brevi e più che ragionevoli.

Ingresso e uscita della FFT

- **Ingresso**: le moderne routines di FFT accettano in ingresso una sequenza di N valori campionati.
- **Uscita**: viene restituita una sequenza di N numeri complessi; dal momento che ogni numero complesso consta di parte reale ed immaginaria (si hanno quindi in totale 2N numeri reali), e non è possibile ottenere informazioni maggiori rispetto a quelle di partenza (N), solo metà dei numeri restituiti avranno un significato. L'altra metà sarà ridondante.

Ingresso e uscita della FFT



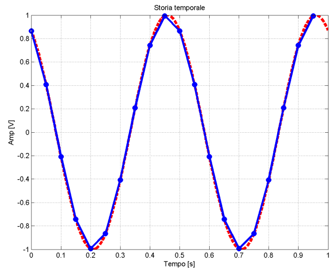
Caso con N pari (se N è dispari, Nyquist non è campionato)

Note ed esempi

Alla FFT non è data alcuna informazione sulla scala dei tempi e sulla frequenza di campionamento, dunque è compito dell'operatore ricostruire la scala delle frequenze.

Si utilizza un esempio per scendere maggiormente nel dettaglio delle operazioni da compiere per arrivare ad ottenere lo spettro di un segnale.

Esempio 1: eseguire la FFT in Matlab



Dati esempio:

f_s = 2 Hz

T_{acq}=1 s

f_{camp}=20 Hz

ampiezza a= 1 V

fase phi=30°

Calcoli:

numero punti $N=T_{acq}*f_{camp}$=20 pti

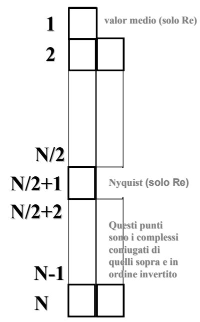
numero periodi $c=T_{acq}*f_s$=2 cicli

risol in freq $\Delta f=1/T_{acq}$=1 Hz

freq Nyquist $f_{Ny}=f_{camp}/2$=10 Hz

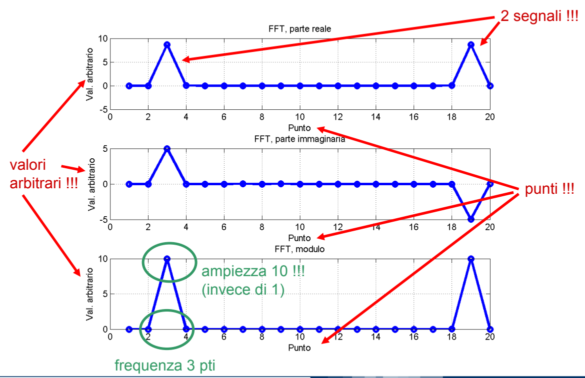
interv. campion $\Delta t=1/f_{camp}$=0.05 s

Trasformata di Fourier (valori in uscita, sono complessi)



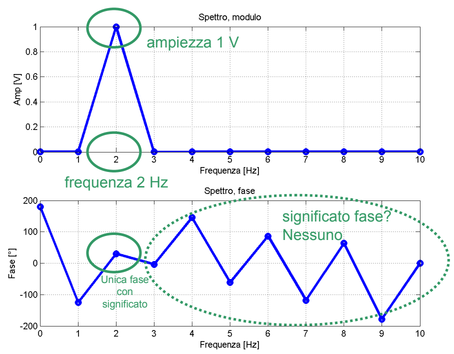
-0.0000 ← Solo reale
-0.0000 - 0.0000i
8.6603 + 5.0000i ← 3ª riga: segnale
0.0000 - 0.0000i
-0.0000 + 0.0000i
0.0000 - 0.0000i
0.0000 + 0.0000i
-0.0000 - 0.0000i
0.0000 + 0.0000i
-0.0000 - 0.0000i
0.0000 ← Solo reale
-0.0000 + 0.0000i
0.0000 - 0.0000i
-0.0000 + 0.0000i
0.0000 - 0.0000i
0.0000 + 0.0000i
-0.0000 - 0.0000i
0.0000 + 0.0000i
8.6603 - 5.0000i ← penultima riga: segnale complesso coniugato
-0.0000 + 0.0000i

Trasformata di Fourier (plot parte reale e immaginaria)

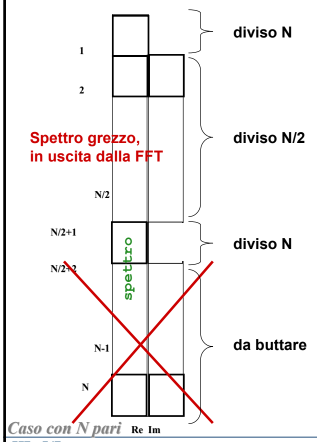


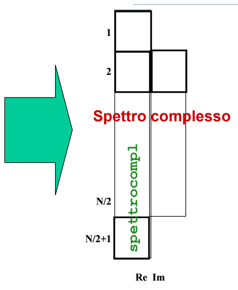
Trasformata di Fourier (plot SPETTRO, modulo e fase)

Questo è quello che si vorrebbe: come arrivarci?



19



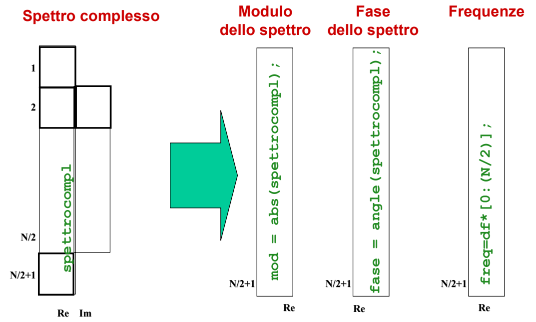


Per recuperare il valore corretto dell'ampiezza si dividono tutte le righe dello spettro

- per N
  - il primo elemento, ossia il valor medio
  - l'elemento N/2+1, ossia Nyquist
- per N/2 (tutti gli altri elementi)

Caso con N pari

20



Caso con N pari

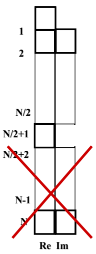
21

Ricostruzione delle ampiezze corrette

Il motivo per cui si divide per N è che l'algoritmo di Fourier non normalizza il risultato per il numero di punti N.

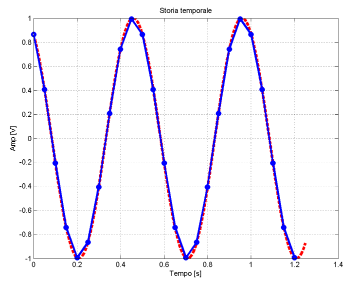
Il motivo per cui si divide per N/2 è che metà dei valori complessi sono stati "buttati via" e quindi il loro contributo energetico va perso. Il fattore 2 fa questa operazione.

Il primo elemento (valor medio) e l'N/2+1 (Nyquist) sono presenti una sola volta e quindi non necessitano del fattore 2.



22

Esempio 2: LEAKAGE



Dati esempio:

uguale a prima tranne:

T_{acq}=1.25 s

Calcoli:

numero punti $N=T_{acq}*f_{camp}$=25 pti

numero periodi $c=T_{acq}*f_s$=2.5 cicli

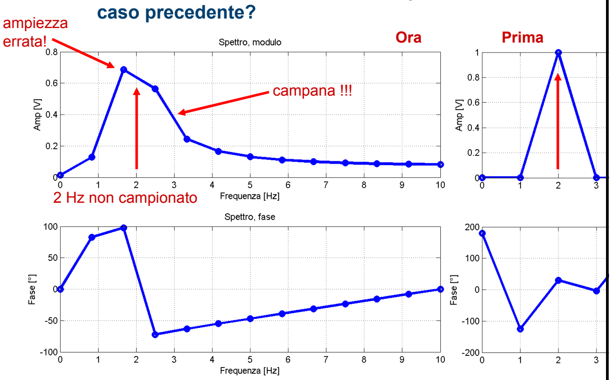
risol in freq $\Delta f=1/T_{acq}$=0.8 Hz

freq Nyquist $f_{Ny}=f_{camp}/2$=10 Hz

interv. campion $\Delta t=1/f_{camp}$=0.05 s

23

SPETTRO: che cosa è cambiato rispetto al caso precedente?



24

Leakage

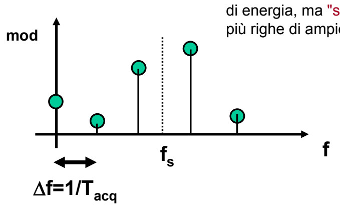
Nel primo caso all'interno della finestra di osservazione erano contenuti un numero intero di cicli, il periodo del segnale è un sottomultiplo intero della finestra di osservazione.

Viceversa, nel secondo caso, nella finestra osservata sono presenti N cicli interi + una frazione di ciclo del segnale armonico: *questo comporta una stima errata sia della frequenza del picco, sia dell'ampiezza, sia del valor medio del segnale.*

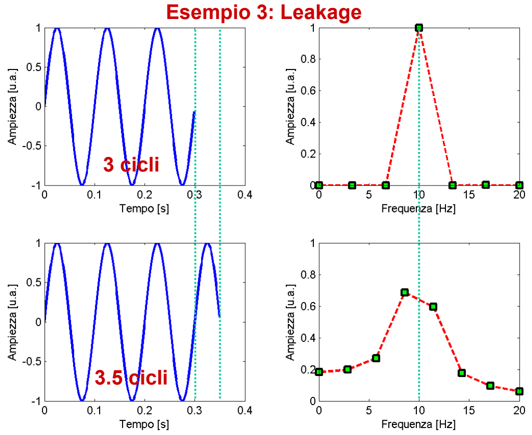
Leakage

Questo avviene perché la frequenza che dovrebbe avere il segnale nello spettro discreto sta a metà strada tra due delle righe disponibili.

Viene salvato il contenuto globale di energia, ma "spargendolo" su più righe di ampiezza minore



Esempio 3: Leakage



f_s = 10 Hz

Leakage

3 cicli

T_{acq}= 0.3 s

$\Delta f = 1/T_{acq}$ = 3.33 Hz

f_4= (k-1) Δf = 10 Hz

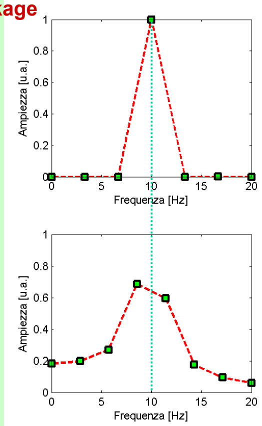
3.5 cicli

T_{acq}= 0.35 s

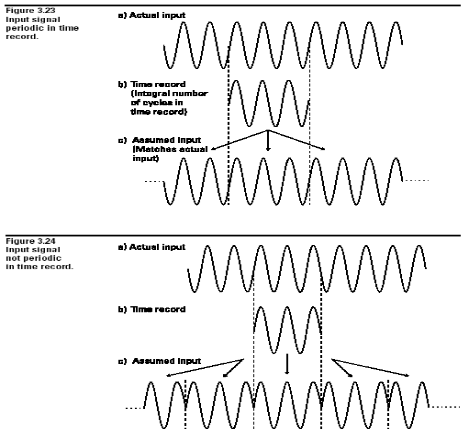
$\Delta f = 1/T_{acq}$ = 2.86 Hz

f_4= (k-1) Δf = 8.57 Hz

f_5= (k-1) Δf = 11.42 Hz

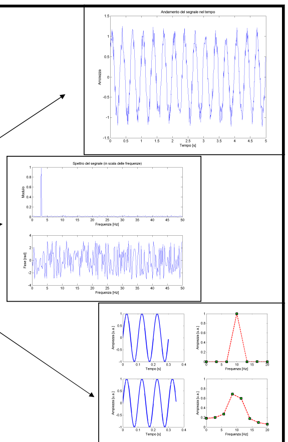


Leakage



Traccia di lavoro

- **esercizio in MATLAB**
  - **generare sinusoide + rumore**
  - **analisi FFT**
  - **analizzare il leakage**




```
%% script di esempio
clear all; close all; home;

%% parametri
fc=20; % Hz, freq camp
T=1.25; % s, tempo totale camp
fs=2; % Hz, freq segnale
amp=1; % V, ampiezza segnale
fase=pi/6; % rad, fase segnale
N=T*fc; % numero punti
t=(0:N-1)'/fc; % vettore dei tempi
x=amp*cos(2*pi*fs*t+fase); % vettore del segnale

rum=0.2*randn(N,1); % rumore gaussiano, scegliere ampiezza
x=x+rum; % aggiunta rumore

%% spettro
[spettro_compl,spettro_mod,spettro_fase,freq] = ffg(x,fc);
spettro_compl % faccio scrivere il vettore in matlab

%% figure
figure; plot(t,x,'-o','linewidth',3); xlabel('Tempo [s]'); ylabel('Amp [V]'); title('Storia temporale'); grid on;
figure; subplot(3,1,1); plot(real(spettro_compl),'-o','linewidth',3); xlabel('Punto'); ylabel('Val. arbitrario'); title('FFT, parte reale'); grid on;
    subplot(3,1,2); plot(imag(spettro_compl),'-o','linewidth',3); xlabel('Punto'); ylabel('Val. arbitrario'); title('FFT, parte immaginaria'); grid on;
    subplot(3,1,3); plot(abs(spettro_compl),'-o','linewidth',3); xlabel('Punto'); ylabel('Val. arbitrario'); title('FFT, modulo'); grid on;
figure; subplot(2,1,1); plot(freq,spettro_mod,'-o','linewidth',3); xlabel('Frequenza [Hz]'); ylabel('Amp [V]'); title('Spettro, modulo'); grid on;
            subplot(2,1,2); plot(freq,spettro_fase*180/pi,'-o','linewidth',3); xlabel('Frequenza [Hz]'); ylabel('Fase [°]'); title('Spettro, fase'); grid on;
```

Cambiare parametri e verificare i risultati

Funzione FFG

Per rendere l'operazione di FFT più semplice, è possibile scrivere una funzione in Matlab che ha i seguenti:

- ingressi
  - vettore dei dati
  - frequenza di campionamento
- uscite
  - trasformata di Fourier complessa
  - modulo dello spettro
  - fase dello spettro
  - scala delle frequenze

```
function [spettro_compl,spettro_mod,spettro_fase,freq] = ffg(dati,fcamp);
```


Funzione FFG


```
function [spettro_compl,spettro_mod,spettro_fase,freq] = ffg(dati,fcamp)
% ****************************************************************
% file: FFG.M
%
% scopo: calcola la Fast Fourier Transform del segnale in ingresso
%        restituendo spettro complesso, modulo, fase e frequenza
%        nelle convenzioni da noi utilizzate
%
% NOTE: - fase relativa alla funzione coseno
%       - taglia il vettore dei dati a un numero pari di punti se è dispari
%
% [spettro_compl,spettro_mod,spettro_fase,freq] = ffg(dati,fcamp);
%
% Scritto da Lorenzo Comolli, 2009
% ****************************************************************

N=max(size(dati));
if N-2*round(N/2)~=0, N=N-1; end % se punti dispari, butto l'ultimo

if min(size(dati))==1 % CASO VETTORE SINGOLO
    dati=dati(:);
    spettro_compl = fft(dati,N);

    spettro_mod(2:N/2+1) = 2/N*abs(spettro_compl(2:N/2+1));
    spettro_mod(1) = abs(spettro_compl(1))/N;
    spettro_mod=spettro_mod(:);

    freq = fcamp/N*(0:N/2)';

    spettro_fase(1:N/2+1) = angle(spettro_compl(1:N/2+1));
    spettro_fase=spettro_fase(:);

else            % CASO VETTORI PLURIMI
    dimens=1;
    spettro_compl = fft(dati,N,dimens);

    spettro_mod(2:N/2+1,:) = 2/N*abs(spettro_compl(2:N/2+1,:));
    spettro_mod(1,:) = abs(spettro_compl(1,:))/N;

    freq = fcamp/N*(0:N/2)';

    spettro_fase(1:N/2+1,:) = angle(spettro_compl(1:N/2+1,:));
end
```


PARTE 2: funzione di trasferimento sperimentale (FdT), ottenuta analizzando le misure sulla trave

Apertura dei file di dati

Usare i comandi Matlab (*vedi relativo help*):

- load
- uigetfile (scelta interattiva del file)

Organizzazione dei dati nei file salvati

	1	2
Tempo	**Accelerometro**	**Fotocellula**

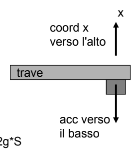
Se non c'è va ricostruito con:

```
N=max(size(Dati)); % numero di punti acquisiti
fcamp=5000; % Hz, scrivere il valore giusto!!!
tempo=(0:N-1)/fcamp; % vettore dei tempi
```


Pretrattamento dati

Dividere le misure di accelerazione (in volt) per la sensibilità S (vale 15 mV/(m/s^2)).

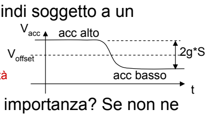
Fare attenzione al segno della sensibilità, in base alla convenzione della direzione di misura (se si vuole come in figura, usare segno negativo).



Verificare la sensibilità ricavandola dalla prova di *capovolgimento del sensore* (quindi soggetto a un gradino di 2*9.81 m/s^2).

```
Acc=Dati(:,1)/(-0.015);
```

Sensibilità



Il valor medio delle varie misure ha importanza? Se non ne ha o non interessa, allora va tolto.

```
Acc=Acc-mean(Acc);
```

Creare i grafici delle storie temporali delle acquisizioni.

Comandi Matlab: figure, plot, subplot, xlabel, ylabel, title, xlim, ylim, legend, ...

Determinazione della funzione di trasferimento (FdT)

La FdT armonica di un sistema indica, per ogni frequenza:

- rapporto tra uscita e ingresso;
- differenza di fase tra uscita e ingresso.

Nel caso in questione:

- ingresso:
  - modulo: forza centrifuga dell'eccentrico, da calcolare come $F_{centrifuga}=m_e r \omega^2$ dove $m_e r=2{,}2 \cdot 10^{-6}$ *kg m* e $\omega=2\pi f$;
  - fase: ricavarla dal segnale della fotocellula (un impulso ogni passaggio dell'eccentrico in alto);
- uscita: accelerazione misurata $\ddot{y}$.

$$FdT_1(\varpi)=\frac{\ddot{y}(\varpi)}{F(\varpi)}$$

*NOTA: è anche possibile ricavare la FdT_2 della accelerazione misurata $\ddot{y}$ rispetto alla accelerazione verticale dell'eccentrico $\ddot{x}$ (m_e=1.6*10^{-3} kg):*

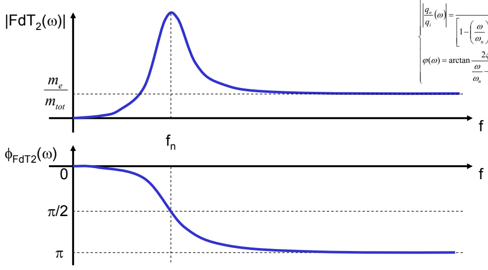
$$F(\varpi)=m_e r\varpi^2;\ \ddot{x}(\varpi)=r\varpi^2;\quad FdT_1(\varpi)=\frac{\ddot{y}(\varpi)}{m_e\,\ddot{x}(\varpi)}=\frac{FdT_2(\varpi)}{m_e};\ FdT_2(\varpi)=\frac{\ddot{y}(\varpi)}{\ddot{x}(\varpi)}$$

Funzione di trasferimento

Noti i rapporti e le differenze di fase si può diagrammare tali valori su dei grafici di modulo e fase, al variare della frequenza. Questi diagrammi rappresentano la ***Funzione di Trasferimento*** del sistema in esame.

Ci si aspetta un risultato del tipo (2° ordine passa alto):

$$\begin{cases} \left|\dfrac{q_o}{q_i}(\omega)\right| = \dfrac{k\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)}{\left[1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \\ \varphi(\omega) = \arctan\dfrac{2\zeta}{\dfrac{\omega}{\omega_n}-\dfrac{\omega_n}{\omega}} \end{cases}$$



Misura della funzione di trasferimento dalle prove monoarmoniche

Per ogni prova, eseguire lo spettro della accelerazione e della fotocellula.

Dallo spettro dell'accelerazione misurare frequenza, modulo e fase del picco.

Dallo spettro della fotocellula misurare la fase corrispondente alla frequenza del picco di accelerazione.

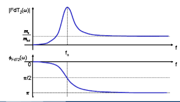
Calcolare quindi il modulo della forza centrifuga.

Fare attenzione a non commettere leakage ed eventualmente attuare i metodi per ridurlo.

Infine calcolare il valore della funzione di trasferimento (FdT) come:

- rapporto tra le ampiezze
- differenza tra le fasi

Diagrammare tutti i valori della FdT misurati.



Misura della funzione di trasferimento dalle prove monoarmoniche

Fare una tabella coi risultati di ciascuna prova (e poi plottare FdT)

Prova	Freq [Hz]	Forza IN [N]	Fase IN [rad]	Acc OUT [m/s^2]	Fase OUT [rad]	|FdT| [m/(s^{2}N)]	ϕ_{FdT} [rad]
note	da spettri	da m$r\omega^2$	da fase fotocellula	da picco spettro acc	da fase spettro acc	rapp acc out / forza in	diff fase out - fase in
1							
2							
3							
4							
5							
…							

Misura della funzione di trasferimento dalle prove monoarmoniche

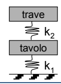
Attenzione alle fasi!

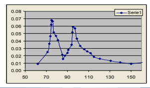
Riportare il risultato dei calcoli nell'intervallo $\pm\pi$.

Come?

- rapporto tra segnali complessi, e solo dopo calcolare modulo e fase;
- oppure fasecorretta=angle(exp(i*fase));

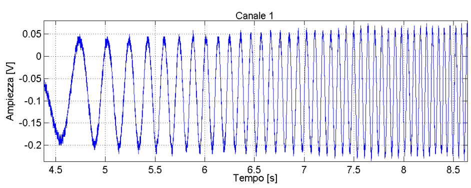
NOTA sul tavolo (vincolo cedevole): il tavolo dove era incastrata la trave non è un sistema infinitamente rigido, e anzi ha una frequenza propria più bassa del sistema sottoposto ad analisi (circa 70 Hz, variabile da tavolo a tavolo). In sostanza il sistema complessivo è un sistema a 2 g.d.l. che quindi mostrerà due risonanze, a meno di non essere intervenuti "opportunamente" per ridurre le vibrazioni del tavolo.



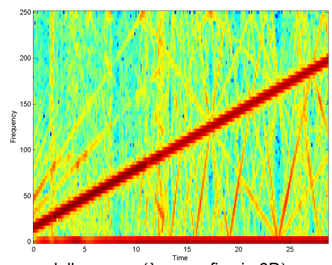


Funzione di trasferimento: tramite sweep

Un metodo molto più semplice e veloce per ottenere la funzione di trasferimento consiste nel registrare in un unico file le informazioni di tutte le frequenze di interesse, ad esempio attraverso uno *sweep* (segnale a frequenza variabile), con range di frequenze centrato attorno alla frequenza di risonanza.



Funzione di trasferimento: tramite sweep



Spettrogramma dello sweep (è un grafico in 3D)

- asse X: tempo
- asse Y: frequenza
- asse Z: modulo dello spettro di un limitato intervallo temporale (codificato con una scala di colori)

Comando Matlab: spectrogram

Funzione di trasferimento in scala logaritmica

Una scala molto diffusa nella pratica di misura è quella logaritmica

Vantaggi:

- Evidenzia armoniche “deboli” che verrebbero mascherate dalla presenza di armoniche “forti”
- Comprime le scale (viene data la stessa risoluzione *percentuale* sull’intero grafico)

Livelli espressi in decibel (dB)

- a: livello attuale
- a_{rif}: livello di riferimento

$$dB = 20 \log_{10} \frac{a}{a_{rif}}$$

Valori di riferimento (norma ISO/DIN 16.83.2)

quantità	definizione	liv. riferimento
livello di accelerazione	$L_a = 20 \log_{10}(a/a_0)$ dB	$a_0 = 10^{-6}$ m/s²
livello di velocità	$L_v = 20 \log_{10}(v/v_0)$ dB	$v_0 = 10^{-9}$ m/s
livello di forza	$L_F = 20 \log_{10}(F/F_0)$ dB	$F_0 = 10^{-6}$ N

Calcolo dello smorzamento e della pulsazione propria del sistema 1gdl, a partire dalla FdT

Analizzando la funzione di trasferimento, si ha la possibilità di ricavare il valore dello smorzamento ζ e della pulsazione propria ω_n del sistema 1gdl.

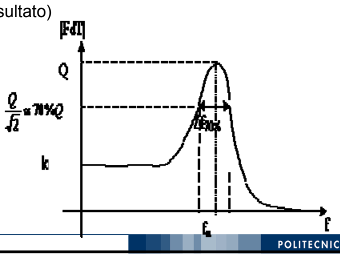
Si propongono di seguito alcuni metodi per la determinazione dei parametri, validi nel caso di strumenti sottosmorzati.

I metodi sono applicabili se la FdT è ottenuta con una risoluzione in frequenza sufficientemente buona (non è il caso di quella per punti).

Metodo 1: larghezza del picco di risonanza

Il metodo largamente più impiegato perchè molto semplice da utilizzare parte dalla misura dell'ampiezza a metà potenza del picco di risonanza. Si ricorda che metà potenza significa circa il 70% dell'ampiezza del segnale. Chiamando $\Delta f_{70\%}$ l'ampiezza a metà potenza, si ha: (si può ricavare per esercizio questo risultato)

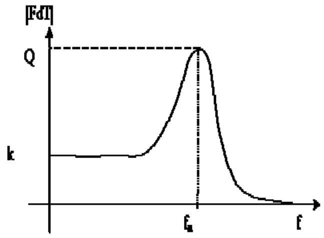
$$\zeta = \frac{\Delta f_{70\%}}{2 f_n}$$



Metodo2: ampiezza del picco di risonanza

Un altro metodo consiste nel misurare l'amplificazione massima Q, che si verifica per $\omega = \omega_n$.

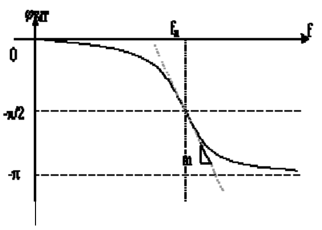
$$\zeta = \frac{k}{2Q}$$



Metodo 3: pendenza della fase

Un altro metodo utilizza l'informazione della fase per ricavare lo smorzamento. Si può ricavare che per la frequenza di risonanza f_n e una pendenza *m* (alla frequenza di risonanza), lo smorzamento vale:

$$\zeta = \frac{1}{m f_n}$$



Confronto degli smorzamenti calcolati

Dopo aver svolto il calcolo dei parametri coi i tre metodi descritti (e in precedenza col decremento logaritmico), valutare se forniscono valori in accordo tra di loro. Discutere quale sia il più affidabile spiegando perché.