POLITECNICO DI MILANO

Come si esprime una misura – Incertezza

Alfredo Cigada

Il punto della situazione

- La lezione precedente ha lasciato aperte alcune questioni: non si è definita la riferibilità, non si è detto in che cosa consiste la taratura, né in che cosa consiste la conferma metrologica.
- Per affrontare questi aspetti è necessario entrare in un discorso più tecnico

Riferimento Normativo

- VIM : International vocabulary of basic and general terms in metrology UNI-CEI U37.00.001.0 (1990)
- UNI 4546, (1984) Misure e Misurazioni: termini e definizioni fondamentali.
- UNI-CEI-ENV 13005 (2000) Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM)
- Supplement 1 to the GUM: Propagation of distributions using a Monte Carlo method
- UNI-ISO 9001-2000 Sistemi di gestione per la qualità
- UNI-ISO 10012 Assicurazione della qualità relativa agli apparecchi per le misurazioni. Linee guida per il controllo dei processi di misurazione
- ISO 17025: Qualità dei Laboratori

Espressione della misura

Una MISURA è una informazione costituita da (UNI 4546):

- Numero
- Incertezza
    - (con il livello di confidenza secondo UNI-CEI ENV 13005)
- Unità di misura

assegnati a rappresentare un parametro in un determinato stato del sistema.

Misura: Esempio

parametro	numero	incertezza	u.d.m.
Temperatura al suolo	297	± 1	kelvin
Massa a vuoto	1244	± 2	kg
Lunghezza corridoio	20,0	± 0,1	m

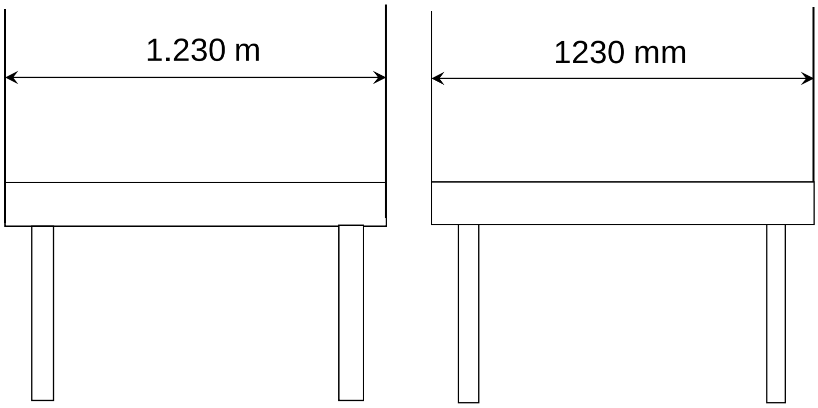
Espressione della misura

Una MISURA è una informazione costituita da (UNI 4546):

- Numero
- Incertezza
  - (con il livello di confidenza secondo UNI-CEI ENV 13005)
- Unità di misura

assegnati a rappresentare un parametro in un determinato stato del sistema.

Numero: Cifre significative



Quante sono le cifre significative nei due casi????

Numero: Cifre significative

Cifre significative: concetto legato all'approssimazione con cui si sceglie di rappresentare una grandezza.

Errore di arrotondamento $\leq \pm 5 \; 10^{-n}$

n = numero di cifre significative utilizzando la notazione scientifica

Esempi:

u = 5.236	tutte cifre significative (4)
u = 5.000	tutte cifre significative (4)
u = 000.5	1 cifra significativa
u = 0.005	1 cifra significativa
u = 1.005	tutte cifre significative (4)
u = 5000	tutte cifre significative È VERO ??????

Numero: Cifre significative

U = 5000 quante cifre significative (c.s.) ha?

Per definirlo devo ricorrere alla notazione scientifica:

- Se interessano solo le migliaia: 1 c.s.
  $u = 5 \times 10^3$
- Se interessano anche le centinaia: 2 c.s.
  $u = 5.0 \times 10^3$
- Se interessano anche le decine: 3 c.s.
  $u = 5.00 \times 10^3$
- Se interessano anche le unità: 4 c.s.
  $u = 5.000 \times 10^3$

Numero: Cifre significative

ARROTONDAMENTO:

Per semplificare, si segue la seguente regola per gli arrotondamenti:

- le cifre da 0 a 4 comportano un arrotondamento sulla cifra precedente alla stessa unità.
- dal 5 al 9 la cifra precedente è arrotondata all'unità superiore.

Numero: Cifre significative

SOMMA

Per l'addizione, in presenza di cifre decimali, bisogna mantenere una cifra decimale in più, nel numero più accurato, in rapporto a quella contenuta nel numero meno accurato. Il risultato va arrotondato al numero di cifre decimali pari a quello del numero meno accurato.

Esempio:

$$\begin{array}{r} 2.635 \; + \\ 0.9 \; + \\ 1.52 \; + \\ 0.7345 \; = \\ \hline 5.79 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{r} 2.64 \; + \\ 0.9 \; + \\ 1.52 \; + \\ 0.73 \; = \\ \hline 5.8 \end{array}$$

Numero: Cifre significative

SOTTRAZIONE

Per la sottrazione, in presenza di cifre decimali, arrotondare il numero più accurato allo stesso numero di cifre decimali di quello meno accurato. Dare il risultato allo stesso numero di cifre decimali del numero meno accurato.

Esempio:

$$\begin{array}{r} 7.6345 \; - \\ 0.031 \; = \\ \hline 7.603 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{r} 7.635 \; - \\ 0.031 \; = \\ \hline 7.603 \end{array}$$

Numero: Cifre significative

PRODOTTO E DIVISIONE

Per la moltiplicazione e divisione arrotondare il numero più accurato ad una cifra significativa in più di quella del numero meno accurato.

Arrotondare il risultato allo stesso numero di cifre significative del numero meno accurato.

Esempio:

$$\frac{(1.2)(6.335)(0.0072)}{3.14159} \longrightarrow \frac{(1.2)(6.34)(0.0072)}{3.14} \longrightarrow 0.0174 \longrightarrow 0.017$$

11Marzo 2009

Espressione della misura

Una MISURA è una informazione costituita da (UNI 4546):

- Numero
- $\boxed{\text{Incertezza}}$
  - (con il livello di confidenza secondo UNI-CEI ENV 13005)
- Unità di misura

assegnati a rappresentare un parametro in un determinato stato del sistema.

Incertezza

DALLA GUM

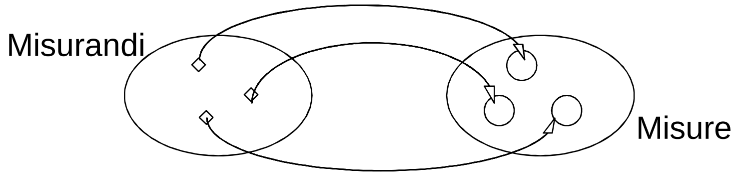
"Sebbene questa guida dia uno schema per stimare l'incertezza, *non può sostituire l'analisi critica, l'onestà intellettuale e l'onestà professionale*. La valutazione dell'incertezza non è né un'attività di routine, né un'applicazione puramente matematica; essa dipende dalla conoscenza dettagliata della natura del misurando e del processo di misura"

Incertezza: Definizione

UNI CEI ENV13005:

L'*incertezza* è un numero associato al risultato di una misurazione, che esprime la *dispersione* dei valori che possono ragionevolmente essere attribuiti al misurando.

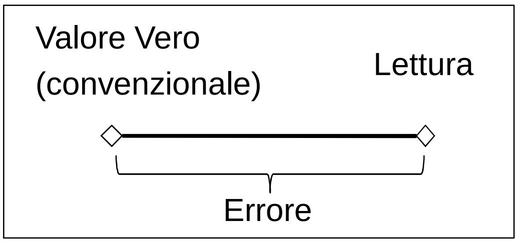
Per capire il significato delle affermazioni fatte e come queste sono in relazione alla definizione di ERRORE, termine più comunemente utilizzato, ci si avvale di un esempio.



NOTA: E' OBBLIGATORIO ESPRIMERE L'INCERTEZZA DI MISURA !!!

Errore ed Incertezza

APPROCCIO CLASSICO:



Questo approccio definisce l'errore come la differenza tra il valore vero della misura e la lettura effettuata

Il valore vero non e' noto, esiste solo convenzionalmente.

Ne viene che l'ERRORE NON E' CONOSCIBILE

Errore ed Incertezza: Componenti dell'errore

COMPONENTI DELL'ERRORE:

CASUALE:

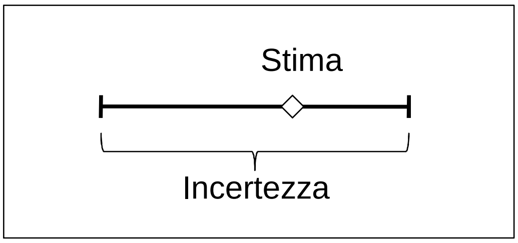
- Dovuta da variazioni non prevedibili o casuali, nel tempo o nello spazio, delle grandezze d'influenza.
- Dà luogo a variazioni in osservazioni ripetute sul misurando.
- Non è possibile correggerla ma ridurla aumentando il numero di osservazioni.

SISTEMATICA:

- Come la componente casuale non può essere eliminata totalmente.
- Se una grandezza d'influenza produce un effetto identificato in un errore sistematico, tale effetto può essere quantificato e corretto apportando una correzione.

Errore ed Incertezza

APPROCCIO GUM (UNI CEI 9, 13005):



Posso solo affermare che il "valore vero" si trova all'interno di un intervallo di valori, con un certo livello di probabilità, oppure che tale valore si trova di sicuro all'interno di un certo intervallo di misura

Si ricorda ancora che

L'incertezza è un numero associato al risultato di una misurazione, che esprime la DISPERSIONE dei valori che possono ragionevolmente essere attribuiti al misurando (UNI CEI 9).

Errore ed Incertezza: Componenti dell'incertezza

- Non scompaiono i concetti, espressi in termini di componente sistematica e componente aleatoria.
- Quando si parla di incertezza ci si riferisce alla sola componente casuale. Come si vedrà in seguito solitamente ci si riferisce ad un modello di distribuzione probabilistica di tipo gaussiano.
- Si dà per scontato che, se si mette in evidenza un effetto sistematico, questo vada corretto prima delle misure, e tale correzione sarà affetta anch'essa da una incertezza.
- Se un effetto sistematico non è conoscibile, non sarà neppure possibile correggerlo e rientrerà nella stima dell'incertezza della misura.
- Nel seguito si daranno definizioni diverse per l'incertezza, che non saranno in conflitto con quelle fornite qui. Qui ci si riferisce all'origine dell'incertezza, la divisione data nel seguito riguarda la tipologia ed i metodi di analisi

Incertezza e Accuratezza

DEFINIZIONE (VIM):

Con riferimento al valore vero di una grandezza si definisce l'*ACCURATEZZA*, ossia l'accordo tra il risultato di una misura ed il valore (convenzionalmente vero) del misurando.

NOTE:

- In virtù di quanto osservato l'accuratezza è un concetto qualitativo.
- Per il VIM il termine precisione va evitato ed in suo luogo è meglio usare ACCURATEZZA.

Incertezza: altre considerazioni

OSSERVAZIONI IMPORTANTI:

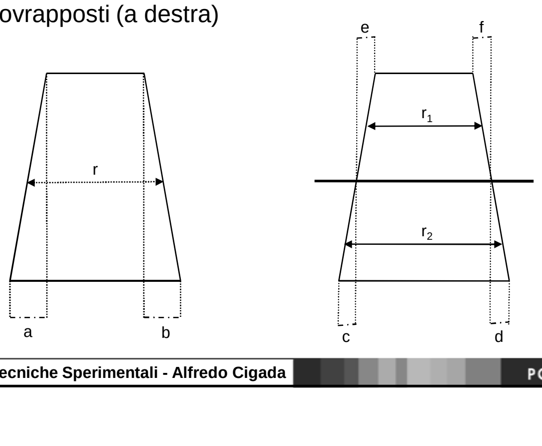
- solo le definizioni hanno incertezza nulla.
- l'incertezza di una misurazione non può essere ridotta a piacimento: esistono dei limiti (economici e fisici) a questo processo (incertezza intrinseca).
- spesso le prestazioni degli strumenti e dei campioni sono esuberanti rispetto ai requisiti necessari per la misura.

Incertezza Intrinseca

E' la minima incertezza che può essere assegnata nella misura di un parametro, fissato un modello descrittivo della grandezza.

L'incertezza assegnabile nella misura non dipende soltanto dal metodo di misura usato, ma contiene una parte legata intrinsecamente alla definizione stessa del parametro.

Esempio: tronco di cono modellato mediante un cilindro (a sinistra) e mediante due cilindri sovrapposti (a destra)



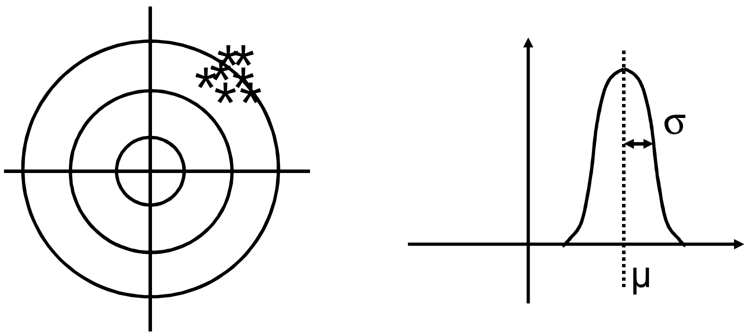
Incertezza intrinseca: limiti del modello matematico

L'incertezza intrinseca nel modello "cilindro" è legata ai valori (a,b) , mentre l'incertezza intrinseca nel modello "doppio cilindro" è legata ai valori (c,d) e (e,f).

E' stato possibile ridurre l'incertezza intrinseca della misura unicamente modificando e raffinando il modello matematico. Di converso bisogna ora stimare due diversi parametri.

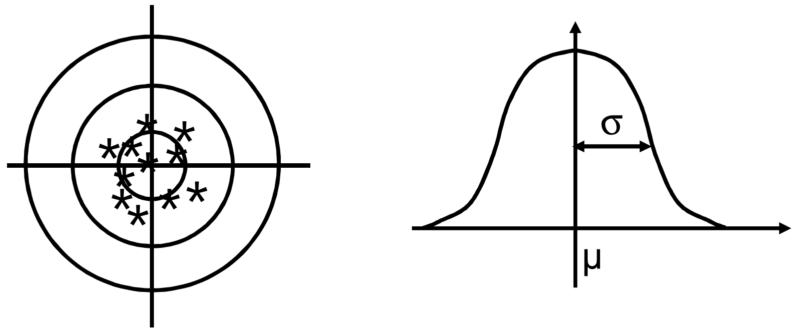
La scelta del modello è sempre un compromesso fra i costi delle campagne sperimentali e l'incertezza che si è disposti a tollerare.

Incertezza: effetti sistematici e casuali



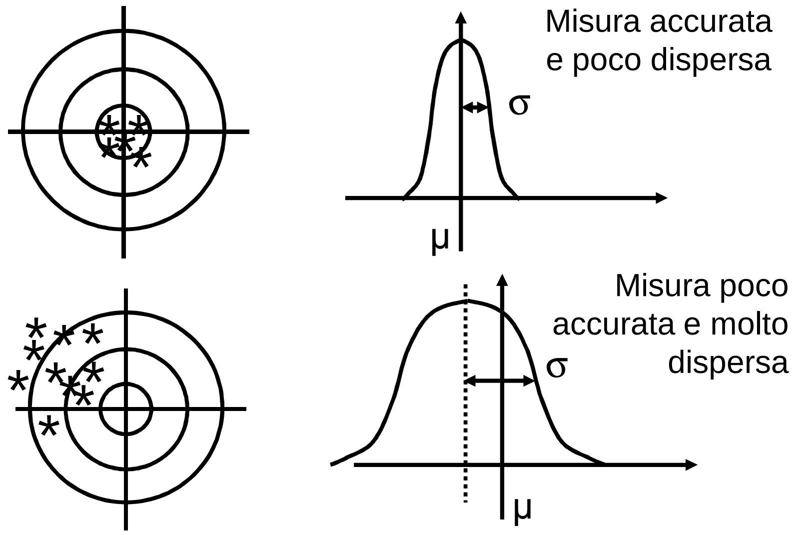
Misura poco accurata e poco dispersa (incertezza ridotta)

Incertezza: effetti sistematici e casuali



Misura accurata e molto dispersa (incertezza elevata), ad esempio dopo correzione di effetto sistematico

Incertezza: effetti sistematici e casuali



Fonti di incertezza

Le 4 principali fonti di incertezza in una misurazione sono:

- non costanza dello stato del sistema tra le misurazioni
- l'incompleta definizione del sistema
- la presenza di effetti strumentali
- l'incertezza intrinseca del misurando

Da uguaglianza a compatibilità

Passando dal concetto di *errore* a quello di *stima* accompagnata da un intervallo di incertezza viene a cadere il concetto di uguaglianza così come comunemente definito.

Il concetto di *uguaglianza* va sostituito con quello di *compatibilità*.

Poiché non è certo il valore numerico del misurando è impossibile parlare di uguaglianza nel senso definito dalla matematica.

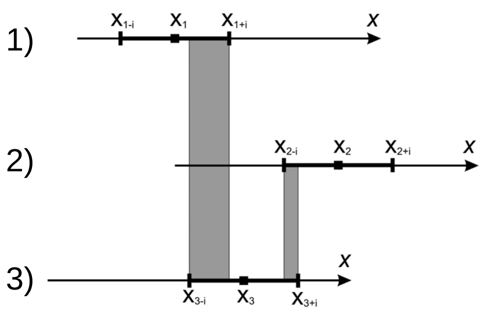
Compatibilità

COMPATIBILITA':

Condizione che si verifica quando le fasce di valore assegnate in diverse occasioni come misura dello stesso parametro nello stesso stato hanno almeno un elemento in comune.

Perché diverse misure siano compatibili è necessario e sufficiente che esista un elemento comune a tutte le fasce di valore: un insieme di misure che soddisfa a questa condizione si dice mutuamente compatibile.

Compatibilità: esempio



1,2 non compatibili

2,3 compatibili

1,3 compatibili

Dalle tre misure eseguite su un certo parametro nello stesso stato, solo uno-tre e due-tre sono mutuamente compatibili; uno e due non sono compatibili perché non ci sono elementi comuni nei loro intervalli.

Risulta evidente che la compatibilità non è una proprietà transitiva come l'uguaglianza.

Compatibilità: esempio dalla UNI 4546

E' indispensabile che le misure siano considerate a parità di condizioni ambientali

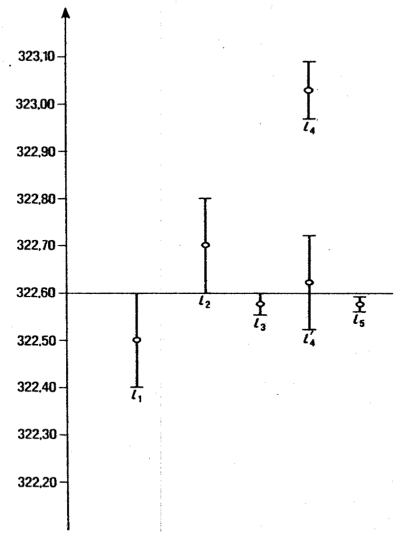
Misure ripetute della lunghezza di un'asta:

l1=322.5 ± 0.1 mm	20 ± 1°C
l2=322.7 ± 0.1 mm	20 ± 1°C
l3=322.58 ± 0.02 mm	20 ± 1°C
l4=323.13 ± 0.05 mm	100 ± 1°C

Riportando l4 alle condizioni di riferimento, ossia 20°C, si ha l4'=322.62 ± 0.1 mm (coeff. dilatazione lineare pari a 20 ± 1 MK^{-1}). Le quattro misure riportate sono compatibili.

l5=322.58 ± 0.01 mm 20 ± 1 °C non è compatibile con l2.

Compatibilità: esempio dalla UNI 4546



Facciamo il punto della situazione..

Al di là dell'inquadramento teorico del problema, l'incertezza va definita numericamente: come ????

RIASSUMIAMO LA SITUAZIONE:

- UNI 4546 : Misura = numero + incertezza + unità di misura (+stato del sistema)
- Incertezza = fascia di valori che possono essere assegnati al parametro.
- Non definisce come determinare l'incertezza, quale criterio usare per definire l'ampiezza dell'intervallo.

UNI-CEI-13005 (Guida ISO)

- L'esito di una operazione di misura è una variabile aleatoria, l'obiettivo è determinarne il valore medio.

Facciamo il punto della situazione..

- UNI-CEI-13005, assunzioni di base:
- si fa riferimento a distribuzione di probabilità di Gauss (distribuzione normale)
- Parametri caratterizzanti la distribuzione μ (<u>media</u>) e σ (<u>deviazione standard</u>, radice quadrata della varianza)
- σ è l'elemento di base per il calcolo dell'incertezza e viene definito <u>incertezza tipo</u> (standard)
- Due modalità di valutazione dell'incertezza:
misura ripetuta, => <u>incertezza tipo "A"</u>
- conoscenza a priori della distribuzione di probabilità, => <u>incertezza tipo "B"</u>

Incertezza tipo (UNI CEI ENV 13005)

INCERTEZZA: parametro, associato al risultato di una misurazione, che caratterizza la dispersione dei valori ragionevolmente attribuibili al misurando.

INCERTEZA TIPO: incertezza del risultato di una misurazione espressa come scarto tipo.

VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA DI CATEGORIA A: metodo di valutazione dell'incertezza per mezzo dell'analisi statistica di serie di osservazioni.

VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA DI CATEGORIA B: metodo di valutazione dell'incertezza con mezzi diversi dall'analisi statistica di serie di osservazioni.

Incertezza tipo

Lo scopo della classificazione in categoria A e categoria B è quello di indicare le due diverse modalità di valutazione delle componenti dell'incertezza ed ha unicamente utilità di tipo: la differenza è sostanzialmente legata a come si procede nell'analisi. La classificazione non sottintende l'esistenza di differenze nella natura componenti risultanti dai due tipi di valutazione (presenti nella catalogazione tra componenti sistematiche ed aleatorie).

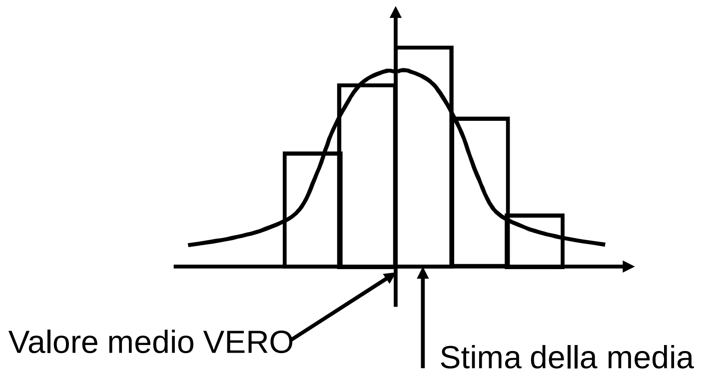
Entrambi i tipi di valutazione sono basati su *distribuzioni di probabilità* e le componenti risultanti da ambedue i metodi sono quantificate mediante varianze o scarti tipo.

Mentre l'incertezza tipo di categoria A è ottenuta da una *densità di probabilità* derivata da una *distribuzione di frequenza* osservata, l'incertezza tipo di categoria B è ottenuta da una densità di probabilità ipotizzata sulla base del grado di credenza nel verificarsi di un evento (*probabilità soggettiva*).

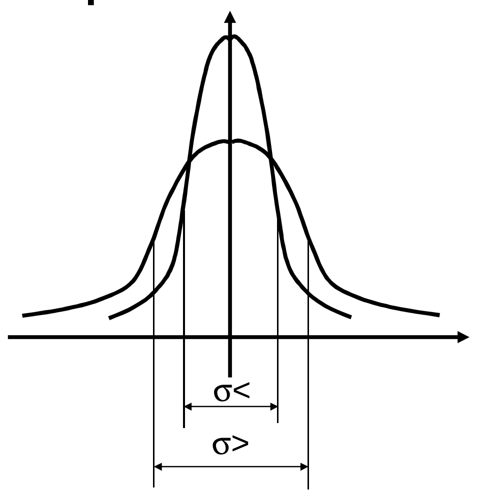
Entrambe le categorie di incertezza possono essere indicate in termini di percentuale sulla misura o come valore assoluto.

Incertezza tipo A

- Si dispone di ripetizioni delle misure
- Ci si appoggia alla statistica



Incertezza tipo A



Con distribuzione normale entro l'intervallo $\pm\sigma$ si trova il 66% degli elementi della distribuzione

Incertezza tipo A

Metodo di valutazione dell'incertezza per mezzo di analisi statistica di serie di osservazioni. Solitamente si fa riferimento ad una *distribuzione gaussiana* dei valori delle misure effettuate in corrispondenza di un determinato valore di riferimento o di una *t-student* se il numero di campioni è inferiore a 30.

La miglior *stima* dei valori attesi μ_x di una grandezza *x* che varia $\overline{x}$ casualmente e della quale sono state ottenute *n* osservazioni indipendenti x_k nelle stesse condizioni sperimentali è il *valor medio* delle *n* osservazioni:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Incertezza tipo A

Le singole osservazioni x_k differiscono a causa di variazioni casuali delle grandezze d'influenza, o effetti aleatori. La varianza sperimentale delle osservazioni, che stima la varianza σ^2 della distribuzione di probabilità di x_k , cioè la varianza della popolazione, è data da:

$$s_p^2 = s^2(x_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2$$

Questa stima della varianza e la sua radice quadrata positiva $s(x_k)$, denominata scarto tipo sperimentale, caratterizzano la variabilità dei valori osservati x_k, cioè la loro dispersione intorno alla media.

Si preferisce lo scarto tipo perché ha unità di misura omogenea con la stima della grandezza (valor medio)

$$s_p = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k - \overline{x})^2}{n-1}}$$

Incertezza tipo A

La miglior stima della <u>*varianza della media*</u> $\sigma^2(\overline{x}) = \sigma^2 / n$, è data da

$$s_m^2 = s^2(\overline{x}) = \frac{s_p^2}{n} = \frac{s^2(x_k)}{n} \qquad s_m = \frac{s_p}{\sqrt{n}}$$

Al crescere delle ripetizioni, l'incertezza diminuisce (cresce denominatore)

La *varianza sperimentale della media* $s^2(\overline{x})$ e lo *scarto tipo sperimentale della media* $s(\overline{x})$ quantificano quanto bene $\overline{x}$ stimi il valore atteso μ_x di x_k tuttavia, ai fini della valutazione qualitativa dell'incertezza di $\overline{x}$ conta la varianza della media.

Generalmente si parla di *varianza di categoria A* ed *incertezza tipo di categoria A*.

Incertezza tipo A

La misura è data dalla media e la sua incertezza è lo scarto tipo della media stessa:

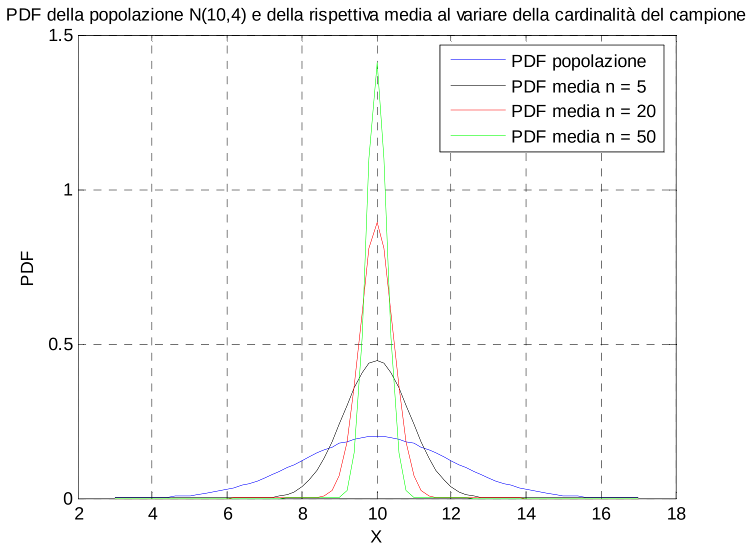
$$x = \overline{x} \pm \frac{s_m}{\sqrt{n}}$$

Al crescere delle ripetizioni diminuisce l'incertezza.

N.B. Si assume che lo strumento sia esente da deviazioni sistematiche che devono essere corrette in fase di taratura (lezione successiva).

Una valutazione fatta con n piccoli porta a una "cattiva stima" dello scarto tipo, per tenerne conto in elaborazioni successive si conserva traccia assieme all'incertezza tipo anche del numero di gradi di libertà del campione impiegato per la valutazione, ν=n-1, ossia del numero di misure ripetute.

Distribuzione gaussiana e distribuzione della media



Incertezza tipo B

Metodo di valutazione dell'incertezza con mezzi diversi dall'analisi statistica di serie di osservazioni.

Per una stima x_i della grandezza d'ingresso X_i che non è stata ottenuta da osservazioni ripetute, la *varianza stimata* $u^2(x_i)$ *o l'incertezza tipo* $u(x_i)$ sono valutate per mezzo di un "giudizio scientifico" basato su tutte le informazioni disponibili sulla possibile variabilità di X_i.

Per comodità $u^2(x_i)$ e $u(x_i)$, valutate in questo modo, sono chiamate *varianza di categoria B* e *incertezza tipo di categoria B*.

Incertezza tipo B

L’insieme di informazioni può comprendere:

•Dati di misurazione precedenti;

•Esperienza o conoscenza generale del comportamento e delle proprietà dei materiali e strumenti di interesse;

•Specifiche tecniche del costruttore;

•Dati forniti in certificati di taratura ed altri;

•Incertezze assegnate a valori di riferimento presi da manuali.

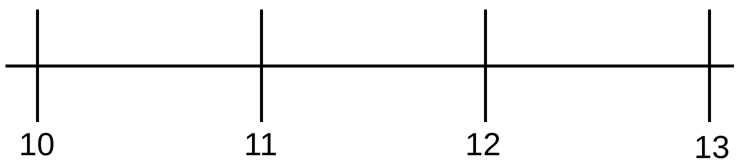
L’uso dell’insieme di informazioni disponibili per una valutazione di categoria B dell’incertezza tipo richiede capacità di approfondimento basata sull’esperienza e conoscenze generali.

Si osservi che una valutazione di categoria B dell’incertezza tipo può essere tanto attendibile quanto una di categoria A, soprattutto quando la valutazione di categoria A è basata su di un numero relativamente ridotto di osservazioni statisticamente indipendenti.

Tutte le valutazioni tipo B hanno per definizione numero di gradi di libertà infinito.

Incertezza tipo B: esempio

STRUMENTO A DISPLAY DIGITALE:

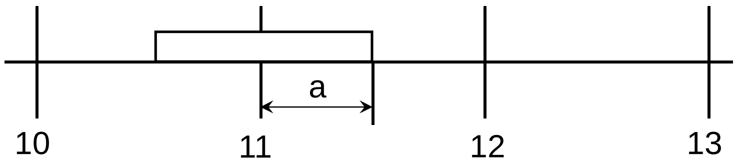


Significato della lettura 11?
Il valore x in ingresso è $10.5<x<11.5$

Nell’intervallo 10.5, 11.5 tutti i valori sono equamente probabili, la funzione distribuzione di probabilità è una costante nell’intervallo, nulla fuori.

Incertezza tipo B: esempio

STRUMENTO A DISPLAY DIGITALE:

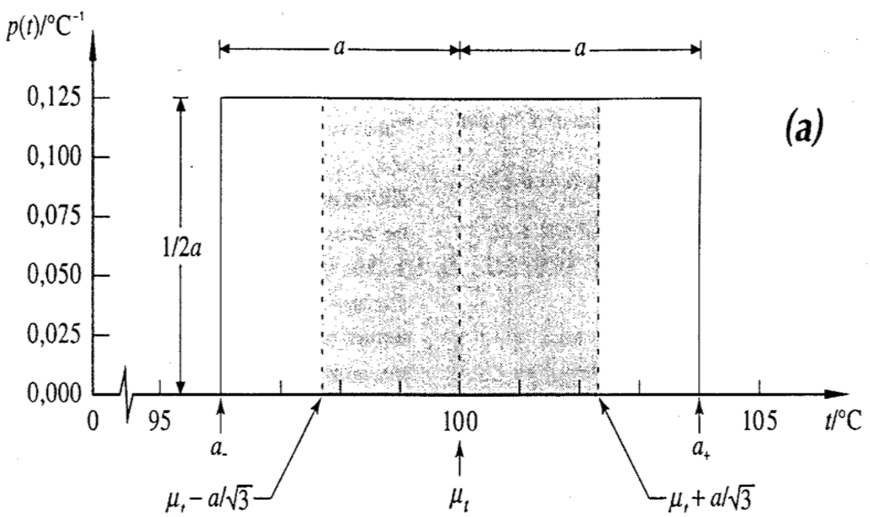


La distribuzione di probabilità è nota, rettangolare:
nessun valore ha probabilità di uscita maggiore degli altri.

La densità di probabilità f(x)=1/a nell'intervallo, 0 fuori
lo scarto tipo, se si accetta una distribuzione rettangolare, è

$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Incertezza tipo B: esempio



Incertezza tipo B: esempio

In molti casi è più realistico attendersi che i valori prossimi agli estremi siano meno probabili di quelli prossimi al centro. In tali casi è meglio sostituire alla distribuzione simmetrica rettangolare una distribuzione simmetrica trapezoidale con:

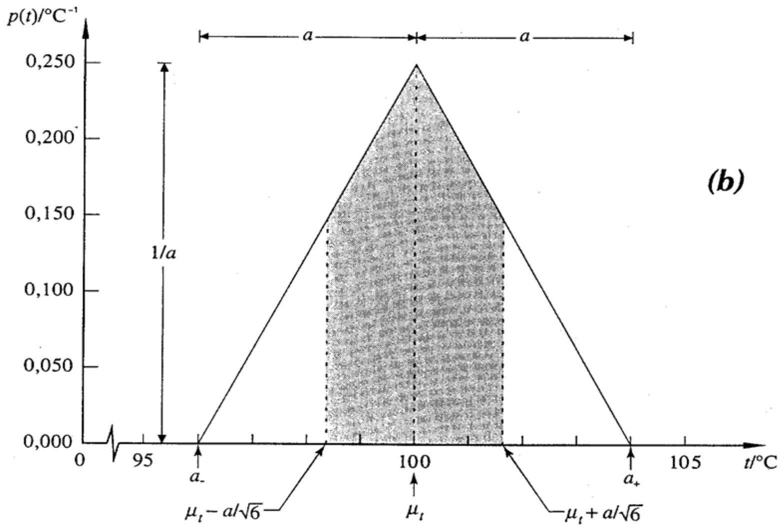
- Lati obliqui uguali
- Base maggiore di ampiezza 2*a*
- Base minore di ampiezza 2aβ, con 0≤ β ≤1

$$\sigma = \frac{2a\sqrt{(1+\beta^2)}}{2\sqrt{6}}$$

Per β→1 la distribuzione tende a quella rettangolare.

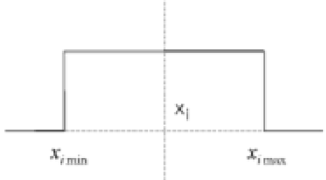
Per β→0 la distribuzione tende alla distribuzione triangolare (vedi pag. seguente) .

Incertezza tipo B: esempio

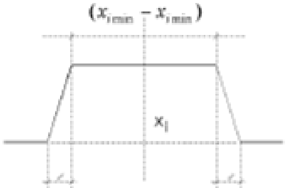


Incertezza tipo B: esempio

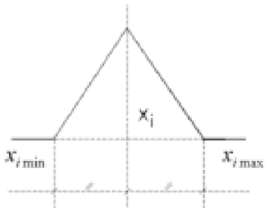
RIASSUMENDO:



$$u(\bar{x}_i) = \frac{x_{i\max} - x_{i\min}}{2 \cdot \sqrt{3}}$$



$$u(\bar{x}_i) = \frac{(x_{i\max} - x_{i\min}) \cdot \sqrt{(1+\beta^2)}}{2 \cdot \sqrt{6}}$$



$$u(\bar{x}_i) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{6}} \cdot (x_{i\max} - x_{i\min})$$

ESEMPIO da GUM: 20 misure di temperatura

Table 1 – Twenty repeated observations of the temperature t grouped in 1 °C intervals

Interval $t_1 \le t < t_2$		Temperature
t_1/°C	t_2/°C	t/°C
94,5	95,5	—
95,5	96,5	—
96,5	97,5	96,90
97,5	98,5	98,18; 98,25
98,5	99,5	98,61; 99,03; 99,49
99,5	100,5	99,56; 99,74; 99,89; 100,07; 100,33; 100,42
100,5	101,5	100,68; 100,95; 101,11; 101,20
101,5	102,5	101,57; 101,84; 102,36
102,5	103,5	102,72
103,5	104,5	—
104,5	105,5	—

ESEMPIO da GUM: Incertezza standard per via grafica

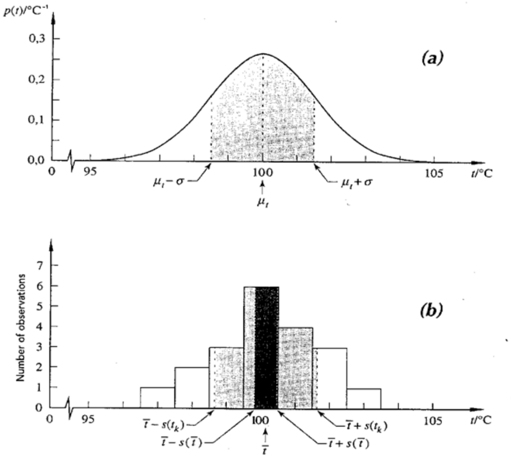


Figure 1. Graphical illustration of evaluating the standard uncertainty of an input quantity from repeated observations

ESEMPIO

X_i è una temperatura t, la sua distribuzione (non nota) è normale; il valore sperato μ_t è 100℃ e la deviazione standard è σ =1.5℃. La funzione densità di probabilità è:

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(t-\mu_t)^2 \big/ 2\sigma^2\right]$$

L'istogramma di pagina precedente riguarda n=20 osservazioni t_k della temperatura che si suppongono acquisite in maniera casuale dalla distribuzione sempre della pagina precedente.

L'intervallo di temperatura scelto per la costruzione dell'istogramma è di 1℃

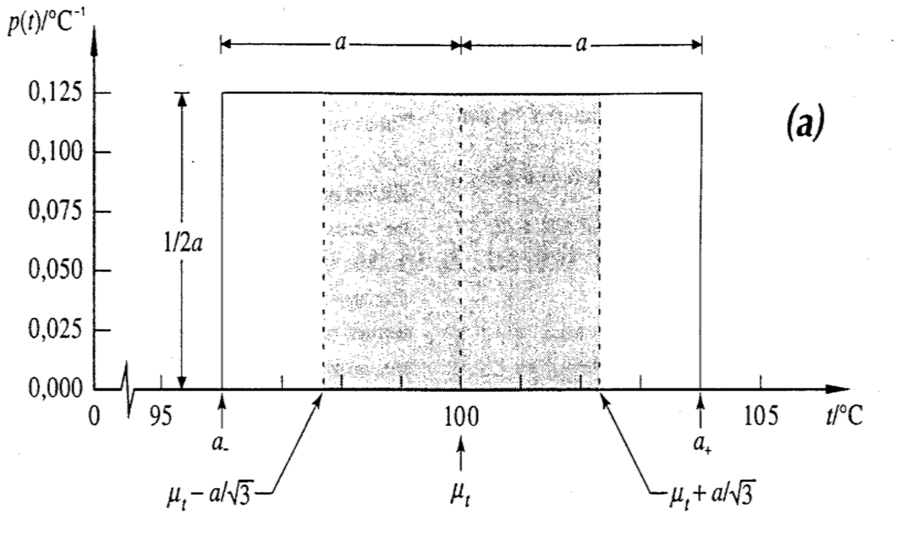
ESEMPIO

Media aritmetica: $\bar{t}$=100.145℃ ≈ 100.14℃: si suppone che sia la miglior stima del valore atteso mt di t, sulla base dei dati disponibili

Deviazione standard sperimentale $s(t_k)$=1.489℃ ≈1.49℃; la deviazione standard della media $s(\bar{t})$, ossia l'incertezza standard $u(\bar{t})$ della media t è

$$u(\bar{t}) = s(\bar{t}) = s(t_k)\big/\sqrt{20} \approx 0.333^\circ \mathrm{C} = 0.33^\circ \mathrm{C}$$

ESEMPIO



ESEMPIO

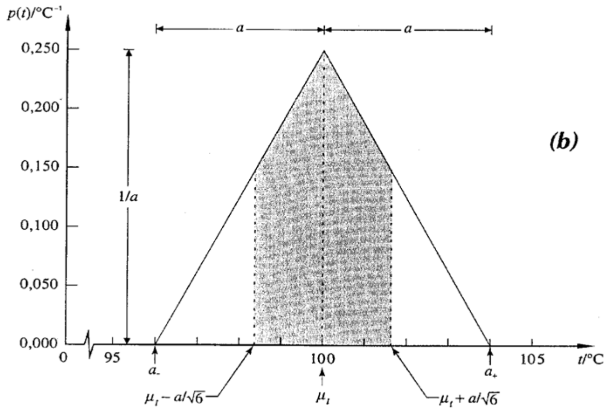


Figure 2. Graphical illustration of evaluating the standard uncertainty of an input quantity from an a priori distribution

ESEMPIO

Le figure di pagina precedente rappresentano la stima di una quantità X_i e la valutazione della incertezza della stima da una distribuzione nota a priori, sulla scorta delle informazioni disponibili.

Anche in questo caso X_i è una temperatura.

<u>CASO A</u>: si sa poco su t, si può solo supporre che t sia descritta da una distribuzione di probabilità tale per cui a_-=96℃ e a_+=104℃.

$$a = (a_+ - a_-) / 2 = 4°C$$

ESEMPIO

Funzione densità di probabilità di t: p(t)=1/2a,
$a_- \leq t \leq a_+$ p(t)=0 altrove
La migliore stima di t è il suo valore atteso:

$\mu_t=(a_+ + a_-)/2=100°C$

L'incertezza standard della stima è:

$$u(\mu_t) = a\big/\sqrt{3} \approx 2.3^\circ C$$

La distribuzione rettangolare è considerata come valore di default quando non vi sono informazioni disponibili sul tipo di distribuzione.

ESEMPIO

CASO B : Supponiamo ora che t possa essere descritta da una distribuzione triangolare simmetrica (fig. b) caratterizzata dagli stessi valori di a del precedente caso :

$a_-= 96\ °C$; $a_+= 104\ °C$

Avremo quindi

$$a = \left(a_+ - a_-\right) / 2 = 4°C$$

La funzione di densità di probabilità di t sarà :

ESEMPIO

$$p(t) = (t - a_-)/a^2 \,; a_- \le t \le ((a_+ + a_-)/2)$$
$$p(t) = (a_+ - t)/a^2 \,; (a_+ + a_-)/2 \le t \le a_+$$
$$p(t) = 0; \text{altrimenti}$$

La migliore stima di t è ancora il suo valore atteso :

$\mu_t=(a_+ + a_-)/2=100$℃

L' incertezza standard della stima è:

$$u(\mu_t) = a/\sqrt{6} \approx 1.6°C$$

ESEMPIO

Confronto valori: $u(\mu_t)=1.6$℃ triangolare

$u(\mu_t)=2.3$℃ rettangolare

con distribuzione normale e $\sigma=1.5$℃ l'intervallo $\pm 2.58s$ che comprende il 99% della popolazione, è di circa 8℃.

Da 20 osservazioni a caso sulla stessa popolazione a distribuzione normale

$u(\bar{t})=0.33$℃

Valutazione dell'incertezza tipo

Nella maggioranza dei casi il misurando Y non viene misurato direttamente, ma determinato mediante altre N grandezze $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ attraverso una relazione funzionale f:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots X_N)$$

Le grandezze $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ possono essere a loro volta dei misurandi o parametri dipendenti da altre grandezze. Ne viene che f può essere molto complessa e che l'unico modo per determinarla sia sperimentale.

Per stimare la grandezza Y occorrerà quindi stimare prima le grandezze d'ingresso $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$.

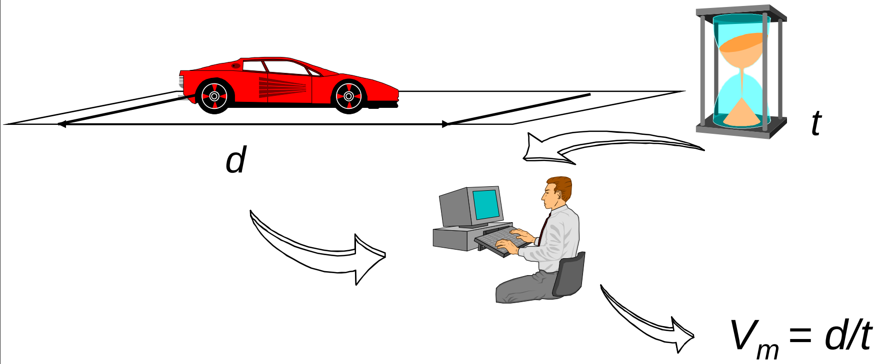
Ogni stima x_i sarà accompagnata da una *varianza tipo* $u^2(x_i)$ e da una *incertezza tipo* $u(x_i)$ di categoria A o B a seconda del metodo utilizzato.

Posto che tali ingressi $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ siano una serie di valori di altri misurandi e/o parametri, affetti ognuno da una incertezza di tipo A o di tipo B, come le singole incertezze determinano l'incertezza del misurando Y ?

Incertezza Combinata: esempio

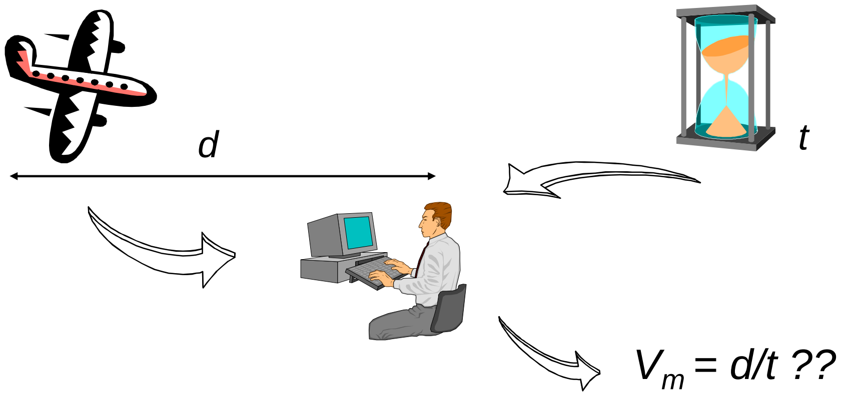
AUTOVELOX:

v=d/t, misura indiretta che passa attraverso la misura di una distanza e di un tempo: come posso dichiarare l'incertezza di v combinando l'incertezza valutata singolarmente su d e su t ?



Incertezza Combinata: esempio

Ovviamente, nella valutazione della velocità di un aereo, cambia l'incertezza sulla valutazione di d: ma il suo peso sull'incertezza globale è grande o piccolo?



Incertezza Combinata

INCERTEZZA TIPO COMBINATA

Come è possibile combinare le incertezze di tipo A e B? Si distinguono due casi:

Grandezze → correlate

Grandezze → incorrelate

Incertezza Combinata: propagazione dell'incertezza

A questo punto è possibile applicare la ***legge di propagazione dell'incertezza***:

$$i = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 i^2(x_i)}$$

Incertezze ingressi

Pesi

Vale solo se posso fare l'ipotesi che NON ci sia *correlazione* tra le variabili che considero come ingressi

12 marzo 2009

Propagazione dell'incertezza: esempio

INCERTEZZA SULLA POTENZA DISSIPATA DA UN RESISTORE:

$$W = \frac{V^2}{R} \quad \text{con} \quad \begin{cases} R = 1250\ \Omega \pm 5\% \\ V = 55\ V \pm 2\ V \end{cases}$$

In entrambi i casi le incertezze sono date come scarti tipo.

In questo caso è facile determinare le singole incertezze di ingresso:

$i_V = 2$ V

$i_R = 1250 * 0.05 = 62.5\ \Omega$

$$\frac{\partial W}{\partial R} = -\frac{V^2}{R^2} = 0.001936$$

$$\frac{\partial W}{\partial V} = \frac{2V}{R} = 0.088$$

Propagazione dell'incertezza: esempio

$$i = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 i^2(x_i)}$$

$$\mathrm{i} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{R}}\right)^2 \mathrm{i}_\mathrm{R}^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{V}}\right)^2 \mathrm{i}_\mathrm{V}^2}$$

E' ora possibile sostituire i valori precedentemente ricavati e ottenere la potenza dissipata nella resistenza:

W = 2.42 ± 0.21 W

N.B. E' OBBLIGATORIO ESPRIMERE L'INCERTEZZA DI MISURA!

Incertezza combinata

Regole pratiche

Dalla regola generale sopra riportata si possono quindi ricavare delle regole pratiche per la stima della incertezza nelle misure derivate attraverso le operazioni elementari:

$$g = a + b \;\Rightarrow\; \Delta g = \pm\left[\left|\Delta a\right| + \left|\Delta b\right|\right]$$

$$g = a - b \;\Rightarrow\; \Delta g = \pm\left[\left|\Delta a\right| + \left|\Delta b\right|\right]$$

$$g = a \cdot b \;\Rightarrow\; \frac{\Delta g}{g} = \pm\left[\left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right|\right]$$

$$g = a / b \;\Rightarrow\; \frac{\Delta g}{g} = \pm\left[\left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right|\right]$$

Incertezza estesa

DEFINIZIONE (UNI CEI 9):

E’ la grandezza che definisce, intorno al risultato di una misurazione, un intervallo che ci si aspetta comprendere una frazione rilevante della distribuzione di valori ragionevolmente attribuibili al misurando.

L’*incertezza estesa* si ottiene moltiplicando l’incertezza tipo per un opportuno *fattore di ricopertura*.

Incertezza estesa

Lo scopo dell'incertezza estesa è la costruzione di un intervallo di valori che contenga il misurando con la confidenza (cioè probabilità) desiderata.

Si noti che il valore del misurando è fisso (anche se incognito); la variabile aleatoria sono gli estremi dell'intervallo della misura.

Un livello di confidenza del 95% significa che, ripetendo 100 volte n misurazioni (n = costante), 95 intervalli su 100 costruiti come (media $\pm$ fattore di copertura * deviazione standard della media) contengono il misurando.

Incertezza estesa

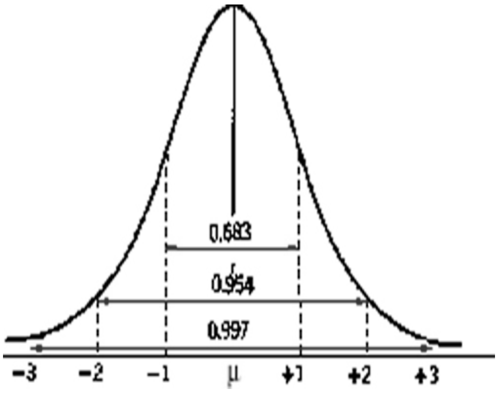
In caso di incertezza A, come fattori di copertura si utilizzano gli opportuni quantili della distribuzione gaussiana ($n > 10$) o della t-Student ($n \leq 10$). In quest'ultimo caso i g.d.l. della distribuzione sono pari a n-1.

Gaussiana e t-Student: ponendo LC = $1-\alpha$, è da scegliere il quantile $1-\alpha/2$. Tipici valori per la distribuzione gaussiana sono 1.96 (LC 95%) e 2.58 (LC 99%).

In caso di incertezza B, come fattori di copertura si utilizzano gli opportuni quantili relativi alla distribuzione di probabilità adottata.

Percentili della gaussiana:

- il 68% delle letture cade nell'intevallo centrato su μ e di estremi μ±1σ
- il 95% delle letture cade nell'intervallo centrato su μ e di estremi μ±2σ
- il 99.7% delle letture cade nell'intervallo centrato su μ e di estremi μ±3σ



Incertezza estesa

In caso di incertezza estesa è obbligatorio indicare, associato alla misura, il livello di confidenza, il fattore di copertura e la distribuzione probabilistica utilizzata.

Esempio:

misura diretta (incertezza A):
10.0 ± 0.5 m

misura con espressione dell'incertezza estesa:
10.00 ± 0.98 m (LC 95%, fc 1.96, distribuzione gaussiana)

Incertezza combinata estesa

Come si sceglie invece il fattore di copertura in caso di incertezza composta?

Per prima cosa si valutano i gdl complessivi mediante la formula di Welch-Satterthwaite:

$$\nu = \frac{u_{comb}^4}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u_{x_i}\right)^4}{\nu_i}}$$

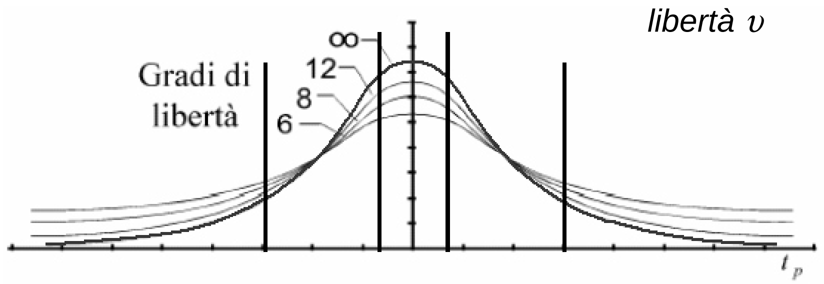
Incertezza combinata estesa

- Si possono comporre incertezze A e B.
- In caso di incertezza A: ν_i = n-1
- In caso di incertezza B: $\nu_i = \infty$, quindi nella formula di Welch-Satterthwaite il contributo si annulla.
- Il risultato si approssima sempre all’intero inferiore.
- Se $\nu \leq 10$ come fattori di copertura si usano i quantili della t-Student con ν gdl, altrimenti quelli della Gaussiana.

Quantili di t-Studenti e gaussiana

A pari ampiezza di intervallo sull'ascissa la gaussiana ha un'area sottesa maggiore di qualunque t-Student.

La t-Student è caratterizzata dal numero di gradi di libertà υ



Per $\upsilon \to \infty$ la t di Student tende alla distribuzione gaussiana.

Riepilogo

Incertezza standard (singolo parametro, n > 10) Tipo A

Incertezza standard (singolo parametro, n ≤ 10) Tipo A

Incertezza standard (singolo parametro) Tipo B

fattore di copertura (quantili Gaussiana)

fattore di copertura (quantili t-Student)

fattore di copertura (quantili distribuzione di probabilità adottata)

Incertezza estesa

Riepilogo

Incertezza standard
(singolo parametro)
Tipo A
Tipo B

Incertezza standard
(singolo parametro)
Tipo A
Tipo B

Legge di propagazione delle incertezze

Incertezza standard combinata

fattore di copertura
(formula W. - S.)

Incertezza estesa

Riepilogo

Si ricorda che l'incertezza va espressa con una o due cifre significative.

Si ricorda che nell'espressione della misura il numero di cifre decimali assegnate alla stima deve coincidere con il numero di cifre decimali associate all'incertezza.

Esempio:

10.0 ± 0.2 kg OK!!!
10.0 ± 0.20 kg NO!!!

Riepilogo

Incertezza standard (singolo parametro)
Tipo A
Tipo B

Incertezza standard (singolo parametro)
Tipo A
Tipo B

Legge di propagazione delle incertezze

Incertezza standard combinata

fattore di copertura

Incertezza estesa

Metodo Monte Carlo

Nelle misure serve per stimare la incertezza combinata di nel caso in cui le ipotesi per l'applicazione della propagazione dell'incertezza non siano verificate.

E' un metodo utile quando:

- non si hanno sufficienti dati sperimentali
- il fenomeno è troppo complesso per poter essere risolto con la teoria di propagazione dell'incertezza

Metodo Monte Carlo

Detta y la grandezza da stimare, con $Y=f(X_1, X_2 \ldots X_k)$ il metodo Monte Carlo può essere applicato qualsiasi sia la distribuzione di probabilità di X_i.

Il metodo è usato per trarre stime attraverso simulazioni. Si basa su un algoritmo che genera una estrazione casuale di ciascun X_i (i=1…k), basandosi sulle distribuzioni di probabilità che si suppone abbiano le grandezze X_i stesse.

Per ogni estrazione viene calcolato Y.

Ripetendo N volte il processo si ottengono N campioni della variabile casuale Y dai quali si può stimare la distribuzione di Y e quindi la relativa incertezza.

Metodo Monte Carlo: Steps

FORMULAZIONE:

•Definizione della grandezza da misurare *Y*

•Definizione della grandezze d'ingresso X_i da cui dipende la grandezza Y

•Definire il modello che lega le grandezze X_i alla grandezza *Y*

•Assegnare alle grandezze in ingresso X_i una distribuzione di probabilità adeguata

PROPAGAZIONE:

•Definire un numero di iterazioni sufficientemente alto (almeno 10^6)

•L'algoritmo di Monte Carlo ad ogni iterazione seleziona, per ognuna delle grandezze d'ingresso, un valore random tra quelli definiti dalla corrispettiva distribuzione.

•Ad ogni iterazione si determina un valore per la grandezza di uscita *Y*

•Alla fine delle iterazioni quello che si ottiene è la distribuzione di probabilità della grandezza *Y*

Metodo Monte Carlo: Risultati

Ottenuta la distribuzione di probabilità della grandezza *Y* è possibile ottenere:

- Stima della media di Y
- Stima della deviazione standard di Y
- Stima del fattore di copertura necessario, dato un determinato valore di confidenza.

Siti di interesse

NIST: http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/index.html
http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/international1.html
AGILENT:
http://metrologyforum.tm.agilent.com/download3.shtml
Doeblin:
Capitolo 5